МАТЕМАТИКА

УДК 517.927.25

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

© 2024 г. В. С. Кобенко[1,*], член-корреспондент РАН А. А. Шкаликов[1,]**

Получено 22.10.2024 г.
После доработки 08.11.2024 г.
Принято к публикации 10.11.2024 г.

В работе рассматриваются краевые задачи, порождаемые обыкновенным дифференциальным выражением n-го порядка и произвольными краевыми условиями с линейной зависимостью от спектрального параметра как в уравнении, так и в краевых условиях. Выделены классы задач, которые названы регулярными и усиленно регулярными. Этим задачам поставлены в соответствие линейные операторы в пространстве $H = L_2[0,1] \oplus \mathbb{C}^m$, $m \leqslant n$ и в явном виде построены сопряженные к ним операторы. В общем виде решена задача об отборе “лишних” собственных функций, которая ранее изучалась только для частных случаев уравнений второго и четвертого порядков. А именно, найден критерий отбора m собственных или присоединенных (корневых) функций регулярной задачи для того, чтобы оставшаяся система корневых функций образовывала базис Рисса или базис Рисса со скобками в исходном пространстве $L_2[0,1]$.

Ключевые слова: краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, спектральный параметр в граничных условиях, регулярные спектральные задачи, базис Рисса.

DOI: 10.31857/S2686954324060106, **EDN:** KKOUDN

1. ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1]–[4] Н. Ю. Капустин и Е. И. Моисеев рассмотрели спектральную задачу

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1),$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) - d\lambda y(1) = 0, \quad d > 0,$$

а также задачу, в которой второе краевое условие заменено на условие $(a-\lambda)y'(1) + \lambda b y(1) = 0$, $a, b > 0$. Они показали, что система собственных функций этих задач является базисом в пространстве $L_p[0,1]$ при $p > 1$ и базисом Рисса в $L_2[0,1]$, если удалить из системы одну из функций. Более того, можно удалить любую функцию, после чего система становится базисом. Эти исследования были продолжены в работах [5]–[7] не только для уравнений второго порядка, но и четвертого. В частности, была рассмотрена задача

$$y^{(4)}(x) - \big(q(x)y'(x)\big) = \lambda y(x),$$

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(1) = a\lambda y'(1), \\ (y'''(1) - q(1)y'(1)) = b\lambda y(1), \end{cases}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ а q — вещественная достаточно гладкая функция. Было показано, что система собственных и присоединенных (корневых) функций этой задачи становится базисом в пространстве $L_2[0,1]$ после удаления двух “лишних” функций из этой системы. Но произвольно две функции удалять нельзя, были найдены условия на пару функций, после удаления которых система образует базис. При этом существенно использовался тот факт, что рассматриваемая задача обладает симметрией и может быть сведена к изучению линейного самосопряженного оператора в пространстве $L_2[0,1] \oplus \mathbb{C}^2$ или самосопряженного оператора в этом пространстве с индефинитной метрикой.

Более общий подход к задаче об отборе “лишних” корневых функций для уравнений второго и четвертого порядка с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра, предложил второй автор этой заметки в работе [8]. В этой же работе было отмечено, что система корневых функций регулярных задач в случае зависимости краевых условий от спектрального параметра всегда переполнена, если ее рассматривать в исходном про-

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[*] *E-mail: svaleryk@yandex.ru*
[**] *E-mail: ashkaliko@yandex.ru*

странстве L_2 или L_p, поэтому эти системы надо рассматривать в других функциональных пространствах. Более того, это замечание было сделано еще в работе [9] для более общих краевых задач с полиномиальной зависимостью от спектрального параметра как в уравнении, так и в краевых условиях. При этом Лемма 2.1 из [9] дает ключ к решению вопроса о том, какие функции надо удалять, чтобы оставшаяся система становилась минимальной. Однако детально тема об отборе "лишних" функций в работе [9] не рассматривалась, основной целью работы [9] было построение линеаризаторов общих задач в различных функциональных пространствах и дальнейшее изучение спектральных свойств построенных линеаризаторов. Кроме того, в общей ситуации решать задачу об отборе "лишних" функций нецелесообразно. Однако в случае линейной зависимости уравнения и граничных условий от спектрального параметра задача о "лишних" функциях получает законченное красивое решение и более полно проясняет существо дела даже для частных рассмотренных ранее спектральных задач. Представить такое решение есть основная цель этой работы. Основной результат работы сформулирован в Теореме 6.

Отметим, что литература о краевых задачах со спектральным параметром в граничных условиях очень обширна. В работах [5, 8, 9] имеются ссылки, отражающие эту тему лишь частично. Из последних работ по асимптотикам собственных значений таких задач отметим статью Д. М. Полякова [10]. В последние годы большое число работ на эту тему связано с исследованием обратных задач. Наиболее полную информацию по таким задачам можно найти в работах Н. П. Бондаренко и Е. Е. Читоркина [11] и Н. Д. Кулиева [12].

Итак, основная цель работы — решить задачу об отборе "лишних" корневых функций для линейной спектральной задачи

$$\ell(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = \lambda y, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} U_j^0(y) - \lambda U_j^1(y) = 0, & j = 1, \dots, m \leqslant n, \\ U_j^1(y) = 0, & j = m+1, \dots, n. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь линейные формы в краевых условиях имеют вид

$$U_j^1(y) = \sum_{k=0}^{\kappa_j} \left(a_{j,k}^1 y^{(k)}(0) + b_{j,k}^1 y^{(k)}(1) \right), \ j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $a_{j,k}^1$ и $b_{i,k}^1$ комплексные числа. Линейные формы $U_j^0(y)$ имеют такой же вид, но с другими числами $k_j^0, a_{j,k}^0, b_{j,k}^0$. Коэффициенты дифференциального выражения $\ell(y)$ предполагаем достаточно гладкими, такими, что $p_k(x)$ имеют k суммируемых производных. Это нужно для того, чтобы сопряженную задачу понимать в классическом смысле. От этого условия можно отказаться, но тогда нужно вводить понятие квазипроизводных и пользоваться результатами работы [13].

Линейная зависимость от спектрального параметра в рассматриваемой задаче позволяет существенно упростить построение линеаризатора этой задачи, которое проведем с помощью метода [9]. Основная техническая трудность дальнейшего исследования задачи состоит в построении сопряженного оператора к построенному линеаризатору. Такое построение мы проведем здесь в явной форме только в случае линейной независимости форм

$$\{U_j^1(y)\}_{j=0}^n \bigcup \{U_j^0(y)\}_{j=0}^m. \qquad (4)$$

Это условие для нас существенно. В случае линейно зависимых форм (4) возможны ситуации, когда сопряженная краевая задача будет иметь уже полиномиальную зависимость от спектрального параметра λ, что существенно усложняет задачу. Приведем конкретный пример:

$$\begin{aligned} &y^{(4)} = \lambda y, \\ &y(0) = \lambda y'(1), \quad y^{(3)}(1) = \lambda\big(y(0) + y(1) + y''(0)\big), \\ &y(1) = \lambda\big(y(0) + y^{(3)}(1)\big), \quad y''(0) = \lambda\big(y(0) + y(1)\big). \end{aligned}$$

В этом случае сопряженная задача будет иметь всего одно краевое условие, зависящее от спектрального параметра λ, но зависимость от λ будет уже в четвертой степени. А именно, сопряженная задача в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} &y^{(4)} = \lambda y, \\ &y(0) = y''(0) = y'(1) = 0, \\ &\lambda^4\big(-y^{(3)}(0) + y(1) - y^{(3)}(1)\big) + \\ &+\lambda^3\big(-y^{(3)}(0) + 2y(1) - y^{(3)}(1) + y'(0) - y''(1)\big) + \\ &+\lambda^2\big(y'(0) + y(1) - y''(1) - y^{(3)}(1)\big) + \lambda y^{(3)}(0) + \\ &+y''(1) = 0. \end{aligned}$$

Далее будем работать с краевыми задачами вида (2), для которых будет выполнено дополнительное условие регулярности или усиленной регулярности.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ И УСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

С задачей (1), (2) свяжем более простую задачу, порожденную тем же уравнением (1) и краевыми условиями

$$U_j^1(y) = 0 \quad j = 1, \dots, n, \qquad (5)$$

которые от λ не зависят. В записи (2) мы предполагаем, что $|a_{j,\kappa_j}^1| + |b_{j,\kappa_j}^1| \neq 0$, а число κ_j называем порядком линейной формы $U_j(y)$. Далее важно, чтобы краевые условия были *нормированными*. Нормировку можно провести также, как в книге М.А. Наймарка [16, Гл.2]. Мы будем пользоваться определением статьи [9], согласно которому краевые условия нормированы, если любые линейные комбинации линейных форм $U_j^1(y)$ не могут понизить их суммарный порядок $\kappa := \kappa_1 + \dots + \kappa_n$. Можно убедиться, что это определение эквивалентно определению [16].

Всюду далее предполагаем, что краевые условия (2) таковы, что участвующие в них формы (5) являются нормированными. Этого можно добиться, рассматривая линейные комбинации условий (2). При этом вид линейных форм $U_j^0(y)$ изменится, что следует учитывать при проверке условия линейной независимости форм (4).

Определение регулярных и усиленно регулярных краевых условий идет от давней работы Дж. Биркгофа [14]. Для более общих краевых задач, полиномиально зависящих от спектрального параметра как в уравнении, так и в краевых условиях, понятие регулярности предложил Я.Д. Тамаркин [15]. В более точной и транспарентной форме это сделано в статье [9]. Задачу (1), (2) можно рассматривать как частный случай задач, рассмотренных в [9], если провести в (1), (2) замену спектрального параметра $\lambda = \rho^n$. Однако в линейном случае определение регулярности можно существенно упростить сведя его к простому определению Биркгофа, представленному в транспарентной форме в книге Наймарка [16] в терминах отличия от нуля двух определителей, в которых фигурируют только коэффициенты a^1_{j,κ_j} и b^1_{j,κ_j} линейных форм $U_j^1(y)$ (мы эти определители не выписываем, так как их значения далее не важны).

Определение 1. Краевую задачу (1), (2) назовем регулярной, если регулярной по Биркгофу является задача (1), (5).

Полезно сравнить собственные значения λ_k^0 и λ_k задачи (1), (5) и задачи (1), (2), а также соответствующие собственные функции y_k^0 и y_k этих задач. Известно (см. [16, Гл. 2]), что собственные значения первой задачи распадаются на две серии, которые при четном n имеют асимптотику

$$\lambda^0_{k,1} = (-1)^{n/2}(2k\pi i)^n\left[1 + \frac{\tau_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \quad k \geqslant k_0, \quad (6)$$

$$\lambda^0_{k,2} = (-1)^{n/2}(2k\pi i)^n\left[1 + \frac{\tau_2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \quad k \geqslant k_0, \quad (7)$$

а при нечетном n асимптотику

$$\lambda^0_{k,1} = (-2k\pi i)^n\left[1 + \frac{\tau_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \quad k \geqslant k_0, \quad (8)$$

$$\lambda^0_{k,2} = (2k\pi i)^n\left[1 + \frac{\tau_2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right] \quad k \geqslant k_0. \quad (9)$$

Здесь числа τ_1, τ_2 определяются функцией p_{n-1} в дифференциальном выражении и коэффициентами краевых условий при старших производных в краевых условиях. При этом подразумевается, что при больших $k \geqslant k_0$ (то есть, для собственных значений, лежащих вне круга достаточно большого радиуса R_0) имеется взаимно однозначное соответствие между числами λ_k^0 первой и второй серий и числами вида (6) и (7) соответственно. Нумерацию оставшихся собственных значений в круге $|\lambda| \leqslant R_0$ проводим так: первую серию нумеруем от $k = 1$ до $k_0 - 1$ в порядке возрастания модулей; тогда найдется целое число s (вообще говоря, неположительное), такое, что вторая серия захватит оставшиеся собственные значения, которые в порядке возрастания модулей будут нумероваться от s до $k_0 - 1$. Конечно, нумерация всех собственных значений проводится с учетом их алгебраической кратности.

Определение 2. Регулярную краевую задачу (1), (2) назовем усиленно регулярной, если либо порядок n нечетный, либо n четный, но числа τ_1 и τ_2 в (6) и (7) различны между собой.

Теорема 1. *Пусть задача* (1), (5) *усиленно регулярна. Тогда собственные значения задачи* (1), (2) *сохраняют асимптотику* (6), (7) *или* (8), (9), *но нумерация второй серии начинается с индекса* $s - n$, *при условии, что нумерация первой серии ведется по-прежнему с индекса* $k = 1$. *Это означает, что в круге радиуса* $R \geqslant R_0$ *при достаточно большом* R_0 *собственных значений у задачи* (1), (2) *ровно на* n *больше, нежели у задачи* (1), (5). *Если при четном* n *задача* (1), (5) *регулярна, но числа* τ_1, τ_2 *совпадают, то для обеих серий собственных значений задачи* (1), (2) *можно гарантировать асимптотику*

$$\lambda^0_{k,\nu} = (-1)^{n/2}(2k\pi i)^n\left[1+\frac{\tau_1}{k}+O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \ \nu = 1, 2. \quad (10)$$

При этом, так же как в случае усиленной регулярности, в круге достаточно большого радиуса задача (1), (2) *имеет ровно на* n *собственных значений больше, нежели задача* (1), (5).

Перед формулировкой следующей теоремы отметим, что в случае усиленной регулярности все достаточно большие по модулю собственные значения рассматриваемых задач простые и каждому из них отвечает единственная (в точностью до умножения на скаляр) собственная функция.

Теорема 2. *Пусть задача* (1), (5) *усиленно регулярна. Пусть* $y_{k,\nu}$ *и* $y^0_{k,\nu}$ *собственные функции задач* (1), (2) *и* (1), (5), *отвечающие собственным значениям* $\lambda_{k,\nu}$ *и* $\lambda^0_{k,\nu}$. *Тогда справедливы асимптотические равенства*

$$y_{k,\nu} = y^0_{k,\nu}\left(1 + O(k^{-1})\right), \quad k \geqslant k_0, \ \nu = 1, 2. \quad (11)$$

3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ЗАДАЧАМИ И ИХ СОПРЯЖЕННЫЕ

Рассмотрим конечномерное расширение $H = L_2[0,1] \oplus \mathbb{C}^m$ пространства L_2 со скалярным произведением

$$\left\langle \tilde{y}, \tilde{z} \right\rangle_H = \int\limits_0^1 y(x)\bar{z}(x)\,dx + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{\beta}_i,$$

$$\tilde{y} = \{y, \alpha_1, \dots, \alpha_m\},\ \tilde{z} = \{y, \beta_1, \dots, \beta_m\} \in H.$$

С задачей (1), (2) свяжем линейный оператор $\mathcal{L}$, который действует в пространстве H следующим образом:

$$\mathcal{L}: \left\{y, U_1^1(y), \dots, U_m^1(y)\right\} \to \to \left\{\ell(y), U_1^0(y), \dots, U_m^0(y)\right\} \tag{12}$$

на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \left\{\tilde{y} = \{y, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \;\middle|\; y \in W_1^n,\ \ell(y) \in L_2;\right.$$

$$\left.\alpha_j = U_j^1(y),\ j = 1, \dots, m;\ U_j^1(y) = 0,\ j = m+1, \dots, n\right\},$$

где $W_1^n = W_1^n[0,1]$ пространство Соболева, состоящее из функций, имеющих $n-1$ абсолютно непрерывных производных.

Теорема 3. *Собственные значения и жорданова структура корневых функций оператора $\mathcal{L}$ и краевой задачи* (1), (2) *совпадают. При этом проекции y_k корневых функций $\tilde{y}_k \in H$ оператора $\mathcal{L}$ на подпространство $L_2[0,1]$ совпадают с корневыми функциями задачи* (1), (2).

Следующая теорема дает описание сопряженного оператора к $\mathcal{L}$.

Теорема 4. *Пусть линейные формы, задающие краевые условия задачи $\{U_i^1\}_{i=1}^n \bigcup \{U_j^0\}_{j=1}^m$, являются линейно независимыми. Тогда сопряженный оператор $\mathcal{L}^*$ имеет вид:*

$$\mathcal{L}^*: \left\{z, V_1^1(z), \dots, V_m^1(z)\right\} \to \left\{\ell^*(z), V_1^0(z), \dots, V_m^0(z)\right\}$$

$$\ell^*(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\overline{p_k} z)^{(k)};$$

$$V_j^\nu(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{c_{j,k}^\nu} z^{(k)}(0) + \overline{d_{j,k}^\nu} z^{(k)}(1)\right), \quad j = 1, \dots, n, \quad \nu = 1, 2, \tag{13}$$

с областью определения:

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}^*) = \left\{\tilde{z} = \{z, \beta_1, \dots, \beta_m\} \;\middle|\; z \in W_1^n, \ell^*(z) \in L_2;\right.$$

$$\left.\beta_j = V_j^1(z), j = 1, \dots, m;\ V_j^1(z) = 0,\ j = m+1, \dots, n\right\}.$$

Линейные формы $V_j^\nu(z)$ могут быть найдены из матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -A_0 & -B_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_0 & D_0 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) & 0 \\ 0 & -P(1) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Здесь $A_\nu = \{a_{j,k-1}^\nu\}_{j,k=1}^n$, $B_\nu = \{b_{j,k-1}^\nu\}_{j,k=1}^n$ — матрицы, элементы которых определяются коэффициентами краевых условий (2), (3) *исходной задачи (при этом, $a_{j,k-1} = b_{j,k-1} = 0$ при $k-1 \geqslant \varkappa_j$), а $C_\nu = \{c_{j,k-1}^\nu\}_{j,k=1}^n$, $D_\nu = \{d_{j,k-1}^\nu\}_{j,k=1}^n$ — матрицы, элементы которых определяют коэффициенты линейных форм* (13). *Правая часть уравнения* (14) *определяется значениями в точках $x = 0, 1$ матрицы-функции $P(x) = \{p_{t,s}(x)\}_{t,s=1}^n$ элементы которой равны*

$$p_{t,s}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\ell=0}^{n-1-t-s} (-1)^{s+\ell+1} & C_{s+\ell}^{\ell} p_{t+s+\ell+1}^{(\ell)}(x), \\ & \text{при } t+s \leqslant n-1, \\ 0, \quad \text{иначе}, \end{cases}$$

где $C_{s+\ell}^{\ell}$ — биномиальные коэффициенты. При построении матриц A_0 и B_0 система линейных форм $\{U_i^1\}_{i=1}^n \bigcup \{U_j^0\}_{j=1}^m$ (если $m < n$) произвольным образом дополняется до системы из $2n$ линейно независимых форм. При этом, хотя запись сопряженного оператора меняется, но сам оператор от дополненных форм не зависит.

4. О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Как было сказано ранее, система корневых функций задачи (1), (2) является избыточной и не образует минимальную систему в пространстве $L_2[0,1]$. Но для построенного оператора $\mathcal{L}$ ситуация меняется.

Теорема 5. *Пусть задача* (1), (2) *регулярна и линейные формы, задающие краевые условия задачи $\{U_i^1\}_{i=1}^n \bigcup \{U_j^0\}_{j=1}^m$, являются линейно независимыми. Тогда система корневых функций оператора $\mathcal{L}$ образует базис Рисса из подпространств размерности $\leqslant 2$ в гильбертовом пространстве H. В случае усиленной регулярности система корневых функций оператора $\mathcal{L}$ образует обычный базис Рисса.*

Теперь из теорем 3—5, используя результаты работы [8], мы можем получить следующий критерий отбора “лишних” функций.

Теорема 6. *Пусть задача* (1), (2) *является регулярной и линейные формы, задающие краевые условия задачи $\{U_i^1\}_{i=1}^n \bigcup \{U_j^0\}_{j=1}^m$, являются линейно независимыми. Пусть $\{\tilde{y}_k\}$ и $\{\tilde{z}_k\}$ взаимно биортогональные системы корневых функций операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$, а $\{y_k\}$ и $\{z_k\}$ — проекции этих функций из H на подпространство L_2. Тогда система функций $\{y_k\}_{k=1}^\infty \backslash \{y_{k_j}\}_{j=1}^m$ образует базис Рисса из подпространств размерности $\leqslant 2$ (а в случае усиленной ре-*

гулярности обычный базис Рисса) тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\begin{vmatrix} V_1^1(z_{k_1}) & \dots & V_1^1(z_{k_m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_m^1(z_{k_1}) & \dots & V_m^1(z_{k_m}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Здесь $V_1^1, \dots, V_m^1$ *— линейные формы, которые определяют сопряженный оператор* $\mathcal{L}^*$ *согласно теореме 4.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20261) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И.* О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 115–119.
2. *Капустин Н. Ю.* Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1024–1027.
3. *Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
4. *Капустин'Н. Ю., Моисеев Е. И.* К проблеме сходимости спектральных разложений для одной классической задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1599–1604.
5. *Керимов Н. Б., Алиев З. С.* Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 10. С. 65–86.
6. *Kerimov N. B., Aliev Z. S.* On the Basis Property of the System of Eigenfunctionsof a Spectral Problem with Spectral Parameterin the Boundary Condition // Differential Equations. 2007. V. 43. P. 905–915.
7. *Алиев З. С., Керимов Н. Б., Мехрабов В. А.* О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 147–161.
8. *Шкаликов А. А.* О базисных свойствах корневых функций дифференциальных операторов, содержащих спектральный параметр в краевых условиях // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 647–659.
9. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр.семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
10. *Поляков Д. М.* Спектральные свойства двучленного оператора четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии // Сибирский математический журнал. 2023. Т. 64. № 3. С. 611–634.
11. *Bondarenko N. P., Chitorkin E. E.* Inverse Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions // Mathematics. 2023. V. 11. № 5.
12. *Guliyev N. J.* Essentially isospectral transformations and their applications // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2020. V. 199. № 4. С. 1621–1648.
13. *Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Математические заметки. 2016. Т. 99. № 5. С. 788–793.
14. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solution of the certain linear difftrential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. P. 219–231.
15. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград: тип. М. П. Фроловой, 1917.
16. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1967.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LINEAR DEPENDENCE ON THE SPECTRAL PARAMETER

V. S. Kobenko[a], Corresponding Member of the RAS A. A. Shkalikov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

The paper considers boundary value problems generated by an ordinary differential expression of the n-th order and arbitrary boundary conditions with linear dependence on the spectral parameter both in the equation and in the boundary conditions. Classes of problems are defined, which are called regular and strongly regular. Linear operators in the space $H = L_2\,[\,0,1\,] \oplus \mathbb{C}^m$, $n \leqslant n$ are assigned to these problems and the adjoint operators to them are constructed in the explicit form. In general, the problem of selecting ”superfluous”eigenfunctions has been solved, which was previously studied only for special cases of equations of the second and fourth orders. Namely, a criterion has been found for selecting m eigen or associated (root) functions of a regular problem so that the remaining system of root functions forms a Riesz basis or a Riesz basis with parenthesis in the original space $L_2\,[0,1]$.

Keywords: boundary value problems for ordinary differential equations, spectral parameter in boundary conditions, regular spectral problems, Riesz basis.