

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЯМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

© 2024 г. Ю. А. Криксин^{1,*}, член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин^{1,**}

Получено 08.10.2024 г.

После доработки 25.10.2024 г.

Принято к публикации 31.10.2024 г.

Рассмотрена задача аппроксимации непрерывной действительной функции одной действительной переменной, заданной на сегменте, при помощи функции с ограниченным спектром на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова. Для модельной тригонометрической функции построены численные оценки точности таких аппроксимаций. Анализируются причины, по которым теоретическая оценка точности аппроксимации непрерывной функции функциями с ограниченным спектром является трудно достижимой. Обсуждается задача об оценке спектра сигнала, заданного на конечном промежутке.

Ключевые слова: аппроксимация, функция с ограниченным спектром, метод регуляризации А. Н. Тихонова.

DOI: 10.31857/S2686954324060091, EDN: KKPBAR

1. Под функциями с ограниченным спектром понимают функции, как одной переменной, так и многих переменных, которые содержат только частоты, принадлежащие заданному ограниченному диапазону. Функции с ограниченным спектром находят широкое применение в задачах о передаче сигналов, анализе временных рядов, в обработке изображений и в ряде других научно-технических приложений [1–7]. В некоторых технических приложениях ставится задача об оценке спектра сигнала или функции, заданных на конечном временном промежутке и, как правило, в конечном числе узлов [3–6]. В других задачах представляет интерес аппроксимация эмпирических данных функциями с ограниченным спектром в заранее определенном диапазоне частот [7]. Следует отметить, что решение указанных задач, вообще говоря, может осуществляться неоднозначно.

Причина этого состоит в следующем. Функции с ограниченным спектром тесно связаны с экспоненциальной системой функций [8–11]. При достаточно широких условиях экспоненциальная система функций обладает свойством полноты в пространстве непрерывных функций с равномерной нормой, заданных на компактном множестве действительного или комплексного евклидова пространства, в пространствах L_p и некоторых дру-

гих пространствах. В пределах заданного множества частот может существовать, вообще говоря, бесконечное множество различных полных экспоненциальных систем функций, с помощью которых эмпирические данные могут быть аппроксимированы функциями с ограниченным спектром с заданной точностью в области своих значений. При этом поведение этих функций за пределами области значений эмпирических данных и, соответственно их спектр, могут оказаться существенно различными.

Такая неоднозначность порождает множественность подходов в спектральном анализе сигналов конечной длительности [4], вызывающую известную неопределенность в результате. Эта неопределенность может быть улажена тем ли иным образом, в результате чего практические задачи находят приемлемое решение. Несмотря на известную размытость в существующих в настоящее время подходах в спектральном анализе и способах аппроксимации данных функциями с ограниченным спектром данное направление исследований остается актуальным и востребованным из-за многочисленных приложений.

Отметим, что задача аппроксимации данных функциями с ограниченным спектром относится к числу некорректно поставленных, поскольку в ее отношении нарушены по крайней мере одно из условий корректности по Адамару [12]: условие устойчивости коэффициентов аппроксимации к малым возмущениям входных данных. Устойчи-

¹Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: krikstin@imamod.ru

**E-mail: v.f.tishkin@mail.ru

вость нарушается вследствие сильного вырождения экспоненциальной системы функций [9–11], линейная комбинация которых представляет собой функцию с ограниченным спектром, используемую в целях аппроксимации. Поэтому естественным подходом к решению задачи аппроксимации авторы считают метод регуляризации А. Н. Тихонова [13, 14]. В настоящей работе рассматривается численный алгоритм аппроксимации функций одной действительной переменной на конечном отрезке прямой с помощью функции с ограниченным спектром на основе метода регуляризации и обсуждается вопрос об определении спектра непрерывной функции, заданной на конечном сегменте действительной прямой.

2. Пусть $\Phi(\omega)$ является комплекснозначной функцией ограниченной вариации на сегменте $[-\Omega, \Omega]$, т.е. ее действительная и мнимая части являются функциями ограниченной вариации [15]. Под функцией с ограниченным спектром будем понимать следующий интеграл Фурье–Стилтьеса

$$\varphi(x) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp(i\omega x) d\Phi(\omega), \quad (1)$$

где Ω — некоторое заданное положительное число.

Функции $\Phi(\omega)$ и, соответственно, (1) в общем случае принимают комплексные значения.

Наряду с (1) рассмотрим действительную функцию с ограниченным спектром

$$f(x) = f_c(x) + f_s(x), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} f_c(x) &= \int_0^{\Omega} \cos(\omega x) dF_c(\omega), \\ f_s(x) &= \int_0^{\Omega} \sin(\omega x) dF_s(\omega), \end{aligned} \quad (3)$$

а $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ являются действительными функциями ограниченной вариации.

Функция (2) может быть представлена в виде (1), т.е. $f(x) = \varphi(x)$, если

$$\Phi(\omega) = F(\omega) - iG(\omega), \quad (4)$$

где

$$F(\omega) = F_c(|\omega|) \operatorname{sign}(\omega)/2, \quad G(\omega) = F_s(|\omega|)/2. \quad (5)$$

Множество действительных функций $f(x)$ с ограниченным спектром вида (2)–(5) будем обозначать через S_{Ω} . Очевидно, функции из S_{Ω} определены на всей действительной прямой и являются бесконечное число раз дифференцируемыми.

Рассмотрим пространство $C[-1, 1]$ действительных непрерывных функций, заданных на сегменте $[-1, 1]$ с равномерной нормой $\|\cdot\|$. Отметим, что множество функций вида (1) и, соответственно, вида (2) содержит счетное всюду плотное подмножество в пространстве $C[-1, 1]$. В самом деле, однопараметрическое семейство действительных функций

$$\varphi_0(x, \varepsilon) = 1, \quad \varphi_m(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\exp(i\varepsilon x) - 1}{i\varepsilon} \right]^m + \left[\frac{\exp(-i\varepsilon x) - 1}{-i\varepsilon} \right]^m \right\}, \quad (6)$$

$$m = 1, 2, \dots,$$

близкое к примеру, приведенному в обзоре [11], представимо в виде (1), если при соответствующих натуральных значениях m выполняется неравенство $\varepsilon < \Omega/m$. Кроме этого $\varphi_m(x, \varepsilon) \rightarrow x^m$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. С учетом того, что система одночленов $\{x^m\}$ образует счетное всюду плотное множество функций в пространстве $C[-1, 1]$, система функций $\{\varphi_m(x, \varepsilon)\}$ из S_{Ω} также является счетной и всюду плотной в $C[-1, 1]$, если ограничиться выбором только рациональных значений ε . Таким образом, для любой функции $g(x) \in C[-1, 1]$ и любом $\Omega > 0$ справедливо равенство

$$\inf \{ \|f(x) - g(x)\|, f(x) \in S_{\Omega} \} = 0. \quad (7)$$

Замечание 1. Равенство (7) выражает тот факт, что для сколь угодно точной аппроксимации любой непрерывной функции из пространства $C[-1, 1]$ функцией с ограниченным спектром (2) может быть использован любой сколь угодно малый диапазон частот $[0, \Omega]$ в (3).

Замечание 2. Вместо пространства непрерывных функций $C[-1, 1]$ можно рассматривать гильбертовы пространства достаточно гладких функций, например, пространства Соболева $W_2^l[-1, 1]$ ($l = 1, 2, \dots$) [16], используя соответствующую норму и оценивать в ней необходимую точность аппроксимации. Отметим, что все нормы указанных пространств Соболева $W_2^l[-1, 1]$ мажорируют равномерную норму $\|\cdot\|$.

3. Для получения аппроксимации функции $g(x) \in C[-1, 1]$ необходимо использовать некоторое удобное в вычислительном отношении представление функций с ограниченным спектром. С этой целью рассмотрим следующую функцию

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)], \quad (8)$$

$$\omega_n = n\Omega/N.$$

принадлежащую множеству S_{Ω} и имеющую период $L = 2\pi N/\Omega$. Максимальное значение длин волн (периодов) тригонометрических функций, входящих

в (8), составляет $\Lambda = 2\pi/\Omega$. Отметим, что с помощью конечных линейных комбинаций тригонометрических функций (8) на сегменте $[-1, 1]$ можно сколь угодно точно аппроксимировать любую функцию вида (2) в норме $C[-1, 1]$, поскольку система функций (8) является плотной в пространстве $C[-1, 1]$.

При достаточно малых значениях Ω система функций $\{1, \cos(\omega_n x), \sin(\omega_n x)\}$ ($n = 1, \dots, N$) является формально линейно независимой, но близкой к вырождению [17], что делает задачу определения коэффициентов аппроксимации (8) функции $g(x) \in C[-1, 1]$ плохо обусловленной. Для получения устойчивого алгоритма вычисления коэффициентов выражения (8), аппроксимирующего функцию $g(x) \in C[-1, 1]$, воспользуемся методом регуляризации на основе минимизации сглаживающего функционала А. Н. Тихонова [14] вида

$$M_\alpha[f, g] = \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]^2 dx + \frac{\alpha}{L} \int_{-L}^L \{f^2(x) + [f'(x)]^2\} dx, \quad (9)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Второй интеграл в правой части (9) представляет собой стабилизирующий функционал, в виде квадрата нормы функции $f(x)$ в пространстве $W_2^1[-L, L]$. Для высокоточной аппроксимации первого интеграла в правой части (9) будем применять квадратурную формулу Гаусса, содержащую K узлов. Вторым интеграл в правой части (9) может быть вычислен аналитически. После соответствующих преобразований конечномерная аппроксимация сглаживающего функционала (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\alpha[f, g] = & \sum_{k=1}^K \gamma_k \left[a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n x_k) + \right. \\ & \left. + b_n \sin(\omega_n x_k)) - g(x_k) \right]^2 + \\ & + \alpha \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (1 + \omega_n^2) (a_n^2 + b_n^2) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где $x_k \in [-1, 1]$ и $\gamma_k > 0$ — узлы и веса квадратурной формулы Гаусса соответственно.

Точка минимума квадратичной функции (10) коэффициентов a_n и b_n удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений Эйлера

$$(C + \alpha Q)Z = V, \quad (11)$$

в которой C — симметричная неотрицательно определенная матрица состоит из элементов

$$c_{lm} = \sum_{k=1}^K \gamma_k a_{kl} a_{km}, \quad l, m = 1, 2, \dots, 2N + 1, \quad (12)$$

где a_{km} — элементы матрицы A размерности $K \times (2N + 1)$ с k -й строкой вида

$$A_k = (1, \cos(\omega_1 x_k), \sin(\omega_1 x_k), \cos(\omega_2 x_k), \sin(\omega_2 x_k), \dots, \cos(\omega_N x_k), \sin(\omega_N x_k)). \quad (13)$$

Диагональная матрица Q , искомый вектор коэффициентов $Z = (z_1, \dots, z_{2N+1})^T$ и правая часть $V = (v_1, \dots, v_{2N+1})^T$ в системе линейных уравнений (11) определяются соответственно выражениями

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag}(2, 1 + \omega_1^2, 1 + \omega_1^2, \dots, 1 + \omega_N^2, 1 + \omega_N^2), \\ Z &= (a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)^T, \\ v_m &= \sum_{k=1}^K \gamma_k a_{km} g(x_k), \quad m = 1, 2, \dots, 2N + 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Матрица системы (11) $C + \alpha Q$ является симметричной и положительно определенной, поэтому решение системы (11) единственно. Решая систему уравнений Эйлера (11) при соответствующем положительном значении параметра регуляризации α , можно найти коэффициенты функции (8), аппроксимирующей заданную функцию $g(x) \in C[-1, 1]$. Для вычисления искомой аппроксимации функции $g(x)$ в (8) используются значения коэффициентов a_n и b_n , являющиеся решениями системы линейных алгебраических уравнений (11) при соответствующих значениях параметров α , Ω и N .

Замечание 3. Отметим, что алгоритм на основе минимизации сглаживающего функционала (9) не предоставляет способа получения функции наилучшей точности аппроксимации, но дает возможность получения некоторой оценки ее точности.

4. Проведем вычисления тригонометрических аппроксимаций (8) для следующей модельной тригонометрической функции

$$g(x) = \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \quad (15)$$

на отрезке $[-1, 1]$, решая систему линейных алгебраических уравнений (11) методом квадратного корня при различных значениях параметров Ω и α , чтобы установить их влияние на численную точность таких аппроксимаций. Отметим, что функция (15), рассматриваемая на всей числовой оси, характеризуется единственной гармоникой 2π , и имеет период 1. Согласно неравенству (7) функция (15) может быть аппроксимирована сколь угодно точно с помощью действительных функций с ограниченным спектром (2) и, в частности, с помощью тригонометрической суммы (8) при любых значениях Ω .

Для вычисления первого интеграла в правой части (9) были использованы квадратурные формулы Гаусса с числами узлов $K = 101$. Увеличение числа

узлов на порядок не оказывает существенного влияния на точность вычислений. В тригонометрической сумме (8) значение N было выбрано равным 500, что соответствует числу слагаемых 1001. Отметим, что увеличение числа N вдвое или вчетверо практически не влияет на точность аппроксимации. Сравнение аппроксимируемой функции $g(x)$ и аппроксимирующей функции (8) производилось на равномерных сетках с узлами

$$x_s = -1 + \frac{2s}{S}, \quad s = 0, 1, \dots, S; \quad (16)$$

$$S = 100, 1000, 10000.$$

В пределах указанных значений параметра S заметных различий в точности аппроксимации не выявлено. Результаты приведены для случая $S = 10000$.

На рис. 1 показаны графики модельной аппроксимируемой функции (15) (кривая 1) и аппроксимирующих функций (8) для различных значений верхней границы спектра Ω и соответствующем ей оптимальном значении параметра регуляризации α . В случаях, когда $2\pi \in [0, \Omega]$ ($\Lambda = 0.5, 1$) соответствующие аппроксимирующие функции (кривые 2 и 3) практически точно совпадают с модельной функцией на сегменте $[-1, 1]$. Более того, эти функции обладают экстраполирующими свойствами за пределами сегмента $[-1, 1]$, визуально близко воспроизводя синусоиду на сегменте $[-1.5, 1.5]$. Если же $\Omega < 2\pi$ ($\Lambda = 2, 4, 8$), то точность аппроксимации с уменьшением значений верхней границы спектра Ω резко ухудшается (кривые 4, 5 и 6). За пределами сегмента $[-1, 1]$ кривые 4–6 практически полностью утрачивают экстраполирующие свойства в отношении модельной функции (15), и их значения могут отличаться от аппроксимируемой функции на несколько порядков величин. Причиной понижения качества аппроксимации является ухудшение обусловленности тригонометрического базиса, используемого в (8), по мере уменьшения значения Ω верхней границы спектра. Обусловленность этого базиса определяется спектром теплицевой матрицы типа sinc [17], зависящей от Ω .

Фиксированная конечная точность представления действительных чисел в компьютере, ограниченность его оперативной памяти и возрастающая трудоемкость вычислений являются объективными ограничениями для достижения теоретической точности (7) аппроксимации (8) по мере уменьшения частотного диапазона $[0, \Omega]$.

Как уже отмечалось выше, для ряда прикладных задач представляет интерес оценка спектра сигнала конечной длительности. Допустим, что для некоторой непрерывной функции $g(x)$, заданной на сегменте $[-1, 1]$, получена ее аппроксимация заданной точности с помощью функции с ограничен-

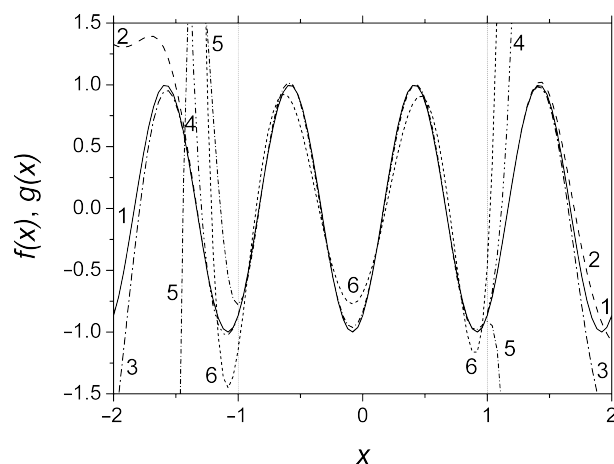


Рис 1. Аппроксимируемая (кривая 1) и аппроксимирующие (кривые 2–6) функции для различных значений верхней границы спектра Ω и соответствующими ей оптимальным значением параметра регуляризации α и точности аппроксимации ε в метрике $C[-1, 1]$: 2 – $L = 0.5$, $\alpha = 1.0 \cdot 10^{-14}$, $\varepsilon = 4.0 \cdot 10^{-7}$; 3 – $L = 1.0$, $\alpha = 1.0 \cdot 10^{-14}$, $\varepsilon = 1.0 \cdot 10^{-6}$; 4 – $L = 2.0$, $\alpha = 1.8 \cdot 10^{-14}$, $\varepsilon = 5.5 \cdot 10^{-3}$; 5 – $L = 4.0$, $\alpha = 5.6 \cdot 10^{-14}$, $\varepsilon = 8.7 \cdot 10^{-2}$; 6 – $L = 8.0$, $\alpha = 3.2 \cdot 10^{-12}$, $\varepsilon = 3.9 \cdot 10^{-1}$.

ным спектром $f(x) \in S_\Omega$. Можно ли использовать спектр функции $f(x)$ в качестве оценки спектра функции $g(x)$? В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный, что иллюстрирует рис. 2, на котором показан спектр мощности для различных аппроксимаций модельной функции (15), полученных с помощью минимизации сглаживающего функционала (10). Здесь под спектром мощности функции (8) понимается следующая функция дискретного аргумента

$$P(0) = 2a_0^2, \quad P(\omega_n) = a_n^2 + b_n^2, \quad (17)$$

$$\omega_n = \frac{n\Omega}{N}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Графики спектра мощности $P(\omega_n)$ аппроксимирующих функций (8) изображены для различных диапазонов частот с верхней границей $\Omega_k = 2\pi/\Lambda_k$ ($\Lambda_k = 2^k$, $k = -1, 0, 1$) в виде ломаных линий 1, 2 и 3 на рис. 2 соответственно. Этим линиям соответствуют кривые 2, 3 и 4 на рис. 1.

Как видно из рис. 2, уменьшение верхней границы Ω диапазона частот вдвое и вчетверо существенно изменяет характерные значения коэффициентов тригонометрической суммы (8) (вплоть до нескольких порядков). В то время как аппроксимирующие функции слабо меняются в пределах заданной точности, соответствующие им коэффициенты при тригонометрических функциях могут отличаться друг от друга на порядки величин для различных значений Ω , не предоставляя возможности их интерпретации в качестве спектра аппроксимируемой функции. Для адекватной оценки спектра

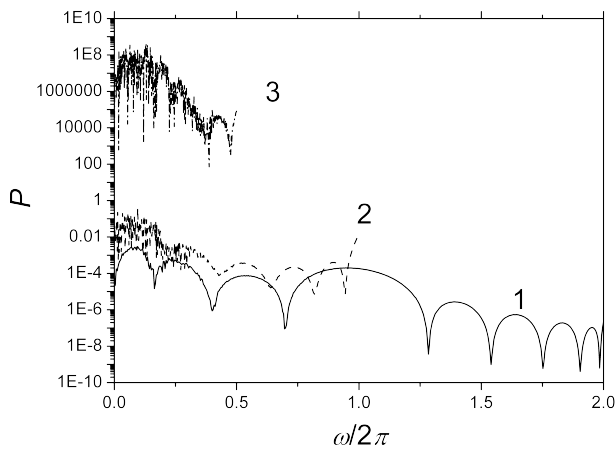


Рис 2. Спектр мощности аппроксимирующих функций (8) при различных значениях $\Omega_k = 2\pi/\Lambda_k$ ($\Lambda_k = 2^k$, $k = -1, 0, 1$): кривая 1 здесь соответствует кривой 2, кривая 2 — кривой 3, кривая 3 — кривой 4 на рис. 2.

функции $g(x)$, заданной на сегменте $[-1, 1]$ необходима дополнительная информация о ее расширенной версии $\tilde{g}(x)$, определенной на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$ и совпадающей с $g(x)$ на сегменте $[-1, 1]$. В качестве примеров такой дополнительной информации можно рассмотреть следующие варианты:

1) функция $g(x)$ принадлежит классу гладких финитных функций с носителем, находящимся внутри рассматриваемого сегмента;

2) функция $g(x)$ является конечным фрагментом (сужением) функции $\tilde{g}(x)$, определенной на всей числовой оси, являющейся периодической или почти периодической функцией, либо реализацией эргодического стационарного случайного процесса.

В рассмотренных примерах для оценки спектра могут применяться методы, описанные в работах [4, 6].

На рис. 3 показаны графики зависимости ошибки аппроксимации в норме $C[-1, 1]$ модельной функции (15). Эти аппроксимации найдены с помощью минимизации сглаживающего функционала (10) и вычисления соответствующих тригонометрических сумм (8) при различных значениях параметра α и верхней границы диапазона частот Ω в отсутствии (рис. 3а) и в присутствии (рис. 3б–г) аддитивного нормального белого шума с нулевым средним и стандартным отклонением σ .

Обратим внимание на существенное различие в поведении кривых 1 и 2 с одной стороны и кривых 3–5 с другой стороны на рис. 3. Данное различие связано с тем, что диапазоны частот $[0, \Omega_k]$ ($k = 1, 2$) включают в себя основную гармонику $\Omega = 2\pi$, соответствующую модельной функции (15), рассматриваемой на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а в диапазонах частот для $k = 3, 4, 5$ данная гармоника от-

сутствует. В последнем случае аппроксимация модельной функции (15) как функции пространства $C[-1, 1]$ происходит за счет низкочастотных гармоник, для которых тригонометрический базис, используемый в (8), является сильно вырожденным, что ведет к понижению точности аппроксимаций, полученных с помощью вычислений с мантисой конечной длины.

Рис. 3б–г характеризуют устойчивость аппроксимаций к погрешности входных данных. В случае использования зашумленных данных точность аппроксимации понижается и примерно соответствует уровню шума. При этом, как это иллюстрируют кривые 1–3, погрешность аппроксимации может оказаться примерно одного уровня как для кривых 1 и 2, где аппроксимирующие функции (8) включают основную гармонику $\Omega = 2\pi$, так и для кривой 3, характеризующейся вдвое меньшей границей спектра $\Omega_3 = \pi$, чем основная гармоника. Наряду с этим значения коэффициентов суммы (8) являются в высокой степени неустойчивыми как к изменению границы Ω частотного диапазона, так и к шуму во входных данных. Таким образом, как в условиях зашумленных, так и в случае высокоточных данных не существует способа определения диапазона спектра по значениям функции на ограниченном промежутке без дополнительных предположений о поведении расширенной на всю числовую ось версии $\tilde{g}(x)$ функции $g(x)$, заданной на конечном промежутке.

5. Переходя к заключительным замечаниям, отметим, что в практически важных случаях обработки сигналов речь идет именно об оценке спектра конечного фрагмента сигнала, заданного на конечной сетке [3–7]. Такая оценка всегда связана с явными или неявными допущениями о поведении сигнала за пределами известного конечного фрагмента. Эти допущения, а также используемые методики могут оказывать существенное влияние на результат оценки спектра [4]. В ряде случаев, таких как анализ речи или музыки, допущения о квазипериодическом характере сигнала являются достаточно устоявшимися и обоснованными. В других ситуациях, когда неясно, как сигнал может быть продолжен за пределы известного фрагмента, существует бесконечно много способов получения его аппроксимации с помощью функций с ограниченным спектром, сильно отличающихся друг от друга по спектральному составу. В последнем случае необходима дополнительная информация о сигнале “в целом”, как функции, заданной на всей числовой оси.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

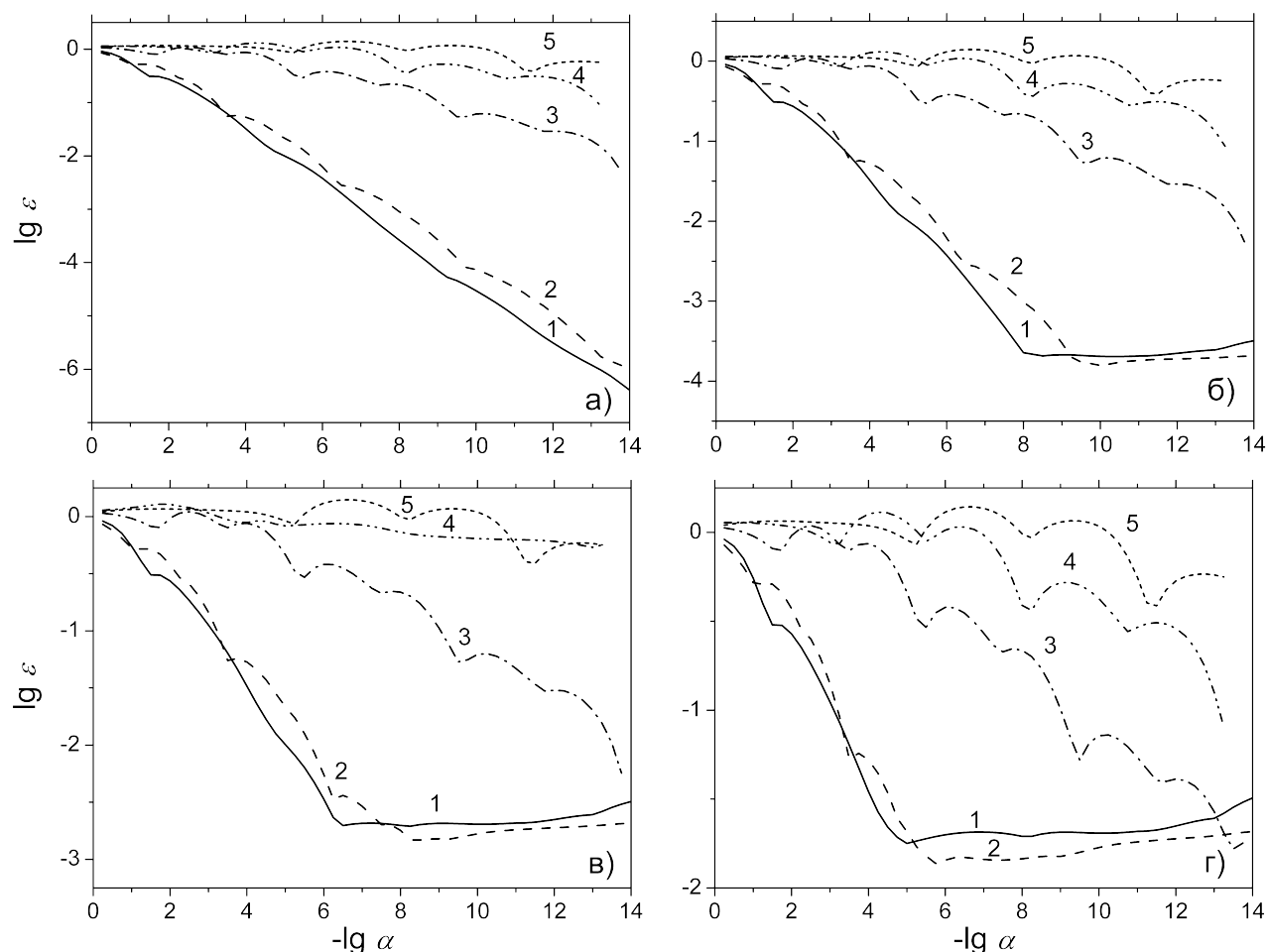


Рис 3. Ошибки аппроксимации (8) модельной функции (15) на сегменте в норме $C[-1, 1]$ как функции параметра регуляризации α для различных значений верхней границы спектра $\Omega_k = 2\pi/\Lambda_k$ ($\Lambda_k = 2^{k-2}$, $k = 1, \dots, 5$), где k — номер соответствующей кривой. К значениям функции (15) в узлах x_k добавлен аддитивный белый шум в виде независимых псевдослучайных чисел с нормальным распределением $N(0, \sigma)$: а) $3\sigma = 0$; б) $3\sigma = 0.001$; в) $3\sigma = 0.01$; г) $3\sigma = 0.1$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М. В. Ломоносова.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котельников В. А. О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи (Приложение). УФН. 2006. Т. 176. № 7. С. 762–770. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0176.200607h.0762>
2. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М.: Физматгиз, 1962. 220 с.
3. Klette R. Concise Computer Vision. An Introduction into Theory and Algorithms. NY: Springer, 2014. 441 p.
4. Marple S. L., Jr. Digital Spectral Analysis with Applications. New Jersey: Prentice-Hall, 1987. 492 p.
5. Sampling: Theory and Applications. A Centennial Celebration of Claude Shannon. Cham, Switzerland: Birkhäuser. 2020. 197 p.
6. Allen R. L., Mills D. W. Signal Analysis: Time, Frequency, Scale. NY: IEEE Press, 2004. 929 p.
7. Wu Y., Sepehri N. Interpolation of bandlimited signals from uniform or non-uniform integral samples // Electronics Letters. 2011. V. 47. № 1. P. 53–55. <https://doi.org/10.1049/el.2010.2183>
8. Iosevich A., Mayeli A. Exponential bases, Paley–Wiener spaces and applications // J. Funct.

- Anal. 2014. V. 268. № 2. P. 363–375.
<https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.10.006>
9. Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 503 с.
10. Пухов С. С. Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. выпуск 2. С. 195–224.
<https://doi.org/10.4213/im4203>
11. Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. 176 с.
12. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
13. Тихонов А. Н. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 2. С. 268–271.
<https://www.mathnet.ru/links/ecb40762fb29b083ddb3c93ec3fb29a3/dan29569.pdf>
14. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
15. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
16. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
17. Kohaupt L., Wu Y. Lower estimates on the condition number of a Toeplitz sinc matrix and related questions // Constructive Mathematical Analysis. 2022. V. 5. № 3. P. 168–182.
<https://doi.org/10.33205/cma.1142905>

ON AN APPROXIMATION BY BAND-LIMITED FUNCTIONS

Yu. A. Kriksin^a and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin^a

^a Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The problem of approximating a continuous real function of one real variable, defined on a segment, using a band-limited function based on A. N. Tikhonov's regularization method is considered. Numerical estimates of the accuracy of such approximations are calculated for a model trigonometric function. The reasons why a theoretical estimate of the approximation accuracy of a continuous function by band-limited functions is difficult to achieve numerically are analyzed. The problem of estimating the spectrum of a signal defined on a finite interval is discussed.

Keywords: approximation, band-limited function, A. N. Tikhonov's regularization method.