

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

© 2024 г. А. Г. Петров^{1,*}

Представлено академиком РАН В. Ф. Журавлевым

Получено 02.09.2024 г.

После доработки 28.10.2024 г.

Принято к публикации 28.10.2024 г.

Рассматривается движение осесимметричного твердого тела с закрепленной точкой под действием периодического момента силы. Вводятся два малых параметра: первый характеризует малость амплитуды момента силы, а второй — малость составляющей кинетического момента перпендикулярной оси симметрии. Малость второго параметра обычно является основанием пользоваться приближенной теорией гироскопа. С помощью такого приближения можно достаточно просто найти скорость прецессии волчка под действием малого периодического момента силы. Показано, что относительная точность вычисленной таким способом скорости практически не зависит от второго малого параметра, не превышающего величину порядка единицы. Таким способом находится простая формула для прецессии спутника Земли под действием земного гравитационного поля. Полученная простая формула для скорости Лунно—Солнечной прецессии Земли хорошо согласуется с астрономическими наблюдениями.

Ключевые слова: приближенная теория гироскопа, Лунно—Солнечная прецессия, прецессия спутника Земли.

DOI: 10.31857/S2686954324060085, EDN: KKVEMK

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение осесимметричного твердого тела описывается с помощью уравнения для единичного вектора $\mathbf{e}$, лежащего на оси симметрии [1]. Точное уравнение включает вторые производные вектора $\mathbf{e}$ по времени. В приближенной теории гироскопа предлагается их не учитывать. Тогда останется уравнение первого порядка относительно вектора $\mathbf{e}$, которое называется уравнением прецессионной теории гироскопа. Из этого уравнения методом осреднения [2] легко находится скорость прецессии под действием периодического момента силы. Показано, что относительная точность скорости прецессии пропорциональна амплитуде момента сил, и не существенно зависит от перпендикулярной к оси волчка составляющей кинетического момента.

2. ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Движение осесимметричного тела с закрепленной точкой, лежащей на оси симметрии удобно описать с помощью единичного вектора $\mathbf{e}$, лежащего

го на оси симметрии. При этом информация о повороте тела около оси симметрии интересоваться нас не будет. Уравнение для вектора можно получить из закона изменения кинетического момента [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}}{dt} &= \mathbf{Mom}, \quad \mathbf{K} = A\mathbf{e} \times \frac{d\mathbf{e}}{dt} + C\mathbf{e}r \\ \frac{d\mathbf{K}}{dt} &= A\mathbf{e} \times \frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2} + Cr\frac{d\mathbf{e}}{dt} + C\mathbf{e}\frac{dr}{dt} = \mathbf{Mom} \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{K}$ — кинетический момент, $\mathbf{Mom}$ — момент силы приложенной к точке на оси симметрии, $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный по оси симметрии, A , C — моменты инерции твердого тела, r — проекция угловой скорости на ось симметрии. Предполагается, что вектор $\mathbf{Mom}$ — периодическая функция аргумента $\tau = \omega t$, ω — частота.

Введем два безразмерных параметра

$$\varepsilon = \frac{\max |\mathbf{Mom}|}{Cr\omega}, \quad \varepsilon_1 = \frac{A\omega}{Cr} \quad (2)$$

и предположим, что проекция момента сил $\mathbf{Mom}$ на ось $\mathbf{e} = 0$.

¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: petrovipmech@gmail.com

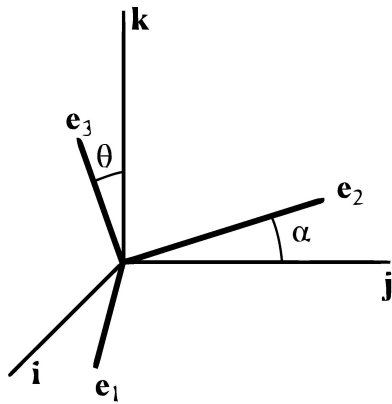


Рис 1.

Тогда система приведет к следующему безразмерному виду

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 (\ddot{\alpha} \sin \theta + 2\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \theta) + \dot{\theta} &= \varepsilon M_1(\theta, \alpha, \tau), \\ \varepsilon_1 (\ddot{\theta} - \dot{\alpha}^2 \sin \theta \cos \theta) + \dot{\alpha} \sin \theta &= \varepsilon M_2(\theta, \alpha, \tau), \\ \dot{r} &= 0, \quad \tau = \omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь точками обозначены производные по τ . Параметр ε_1 определяет отношение первых слагаемых в левой части уравнений ко вторым. При $\varepsilon_1 \ll 1$ обычно пользуются приближенной теорией гироскопа, в которых первые слагаемые отбрасываются [1]

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon M_1(\theta, \alpha, \tau), \quad \frac{d\alpha}{d\tau} \sin \theta = \varepsilon M_2(\theta, \alpha, \tau) \quad (4)$$

Для компонент момента с малым параметром ε система (4) достаточно легко исследуется методом осреднения.

Кажется очевидным, что относительная погрешность приближенной теории гироскопа (4) пропорциональна параметру ε_1 . Однако это не так. Показано, что относительная погрешность углов нутации и прецессии, определяемая по приближенной теории гироскопа (4), пропорциональна параметру ε почти при всех значениях параметра ε_1 ограниченных числом порядка единицы. Важность этого утверждения следует из факта существования многих задач механики, в которых параметр ε_1 существенно превосходит по величине параметр ε .

3. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ И ПРИМЕРЫ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Теорема 1. Для полной системы уравнений (3) с 2π периодическими по τ компонентами момента силы M_i с малыми параметрами ε и ε_1 угол прецессии определяется из системы уравнений (4) с относительной погрешностью порядка ε и почти при любых малых значениях ε_1 приближается осредненной системой (4).

Пример 1. Прецессия тела в задаче двух тел. Рассмотрим круговую задачу двух тел, в которой первым телом является твердое тело массы m , а второе имеет массу M . Тела притягиваются по закону

$$\mathbf{F} = -\gamma M m \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (5)$$

Тело массы m под действием силы $\mathbf{F}$ движется по окружности радиуса R_1 , центр которой расположен в центре масс тел. За счет неоднородности поля (5) на твердое тело массы m действует момент силы относительно его центра масс

$$\begin{aligned} \text{Mom}(\omega t) &= \frac{3\gamma M m}{R^3} (A - C) \tilde{\mathbf{M}}, \\ \tilde{\mathbf{M}} &= ((\mathbf{r}_0/R) \cdot \mathbf{e}) ((\mathbf{r}_0/R) \times \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус вектор из центра тела массы m в центр тела M , A и B моменты инерции тела относительно оси симметрии и оси перпендикулярной ей $R = |\mathbf{r}_0|$.

Тела движутся по круговым орбитам относительно центра масс и расстояние между телами остается постоянным. Круговая орбита находится в плоскости векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

В соответствии с теоремой достаточно решить упрощенную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \varepsilon M_1(\theta, \alpha, \tau), \quad \frac{d\alpha}{d\tau} \sin \theta = \varepsilon M_2(\theta, \alpha, \tau), \quad \frac{dr}{d\tau} = 0 \\ M_1 &= \sin \theta \cos(\tau - \alpha) \sin(\tau - \alpha), \\ M_2 &= -\sin \theta \cos \theta \cos^2(\tau - \alpha). \end{aligned}$$

Усредняя правые части, получим

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{2} \varepsilon \cos \theta, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \varepsilon = \frac{3\gamma M}{R^3 r \omega} \delta = 3 \frac{\omega}{r} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1}.$$

Эта формула удобна для вычисления угловой скорости прецессии искусственного спутника Земли (ИСЗ) при наличии динамической симметрии. Отношение массы спутника к массе Земли следует положить равной нулю $m/M = 0$ и формула упрощается

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{\omega^2}{r} \delta \cos \theta. \quad (7)$$

Для ИСЗ “Фотон М-2” угловая скорость обращения по орбите известна достаточно точно $\omega = 0.001138$ рад/сек, динамический параметр $\delta = (C - A)/C = 2.70$ [3], угловая скорость вращения спутника около собственной оси к концу наблюдений установилась в окрестности значения $r = 1.148$ град/сек [3]. Среднее значение угла θ близко к $\theta = 36$ град [3]. Подставляя эти данные в формулу (7), получаем следующую угловую скорость прецессии ИСЗ: $d\alpha/dt = 0.0121$ град/сек. Это значение хорошо согласуется со значением

0.012 град/сек, приведенным в [3] на основании наблюдений.

Пример 2. Лунно-солнечная прецессия. Она складывается из угловых скоростей солнечной и лунной прецессий

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{3}{2} \frac{\omega_1^2}{r} \delta \cos \theta_1, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{3}{2} \frac{\omega_2^2}{r} \delta \cos \theta_2 (1 + m/M_2)^{-1}.$$

Угол наклона плоскости экватора Земли к плоскости вращения Земли вокруг Солнца меняется периодически между значениями $22.5 \text{ град} < \theta_1 < 24.5 \text{ град}$ [4, 5]. Угол наклона плоскости вращения Луны вокруг Земли к плоскости вращения Земли вокруг Солнца меняется в пределах $5 \text{ град} < \varphi < 5.28 \text{ град}$.

Следуя Белецкому [6], примем следующие средние значения

$$\theta_1 = \theta_2 = 23.5 \text{ град}, \quad \varphi = 0 \text{ град},$$

$$\omega_1 = (360/N_1) \text{ град/сутки},$$

$$\omega_2 = (360/N_2) \text{ град/сутки},$$

$$r = 360 \text{ град/сутки}, \quad N_1 = 365 \text{ сутки},$$

$$N_2 = 28 \text{ сутки}, \quad \delta = 0.0033.$$

Отношение масс Земли и Луны $m/M_2 = 81$, а отношением масс Земли и Солнца пренебрегаем. Подставляя эти данные для скорости и периода прецессии получим

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{3}{2} \delta \cos \theta \left(\frac{\omega_1^2}{r} + \frac{\omega_2^2}{r} (1 + m/M_2)^{-1} \right) = \\ &= 3.7686 \times 10^{-5} \frac{\text{град}}{\text{сутки}}, \end{aligned}$$

$$P = \frac{360}{N_1 d\alpha/dt} = 26171 \text{ лет}.$$

Современные наблюдения дают близкое значение $P = 25772 \text{ лет}$.

Замечание 2. Белецкий после усреднения силовой функции по углу прецессии, а затем по истинной аномалии, для периода прецессии получил похожую по структуре формулу для периода прецессии [6, стр. 209], но она приведена, по видимому, с опечатками

$$\Delta = \frac{3}{2} \delta \cos \theta \left(\frac{\omega_1}{r} + \frac{\omega_2}{r \sqrt{1 + m/M_2}} \right), \quad P = \frac{1}{\Delta}.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания № 124012500443-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320 с.
2. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
3. Абрашкин и др. Космические исследования, **45**. № 5. (2007). С. 450–470.
4. Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии. Эдиториал УРСС. 2002, 688 с.
5. Справочное руководство по небесной механике и астероидике. М.: Наука, 1976. 864 с.
6. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ. 1975. 308 с.

APPROXIMATE THEORY OF A GYROSCOPE AND ITS APPLICATIONS TO THE MOTION OF SPACE OBJECTS

A. G. Petrov^a

^a *Ishlinsky Institute of Mechanics Problems of RAS, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V. F. Zhuravlev

The motion of an axisymmetric rigid body with a fixed point under the action of a periodic torque is considered. Two small parameters are introduced: the first characterizes the smallness of the amplitude of the torque, and the second characterizes the smallness of the component of the kinetic moment perpendicular to the axis of symmetry. The smallness of the second small parameter is usually the basis for using the approximate theory of the gyroscope. Using this approximation, one can quite simply find the precession velocity of the top under the action of a small periodic torque. It is shown that the relative accuracy of the velocity calculated in this way is practically independent of the second small parameter, which does not exceed a value of the order of unity. In this way, a simple formula is found for the precession of the Earth's satellite under the action of the Earth's gravitational field. The resulting simple formula for the velocity of the Lunar-Solar precession of the Earth agrees well with astronomical observations.

Keywords: approximate gyroscope theory, Lunar-Solar precession, precession of the Earth's satellite.