

УДК 517.9

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ
ТИПА ЭМДЕНА—ФАУЛЕРА© 2024 г. С. А. Степин^{1,*}, член-корреспондент РАН А. И. Шафаревич¹

Представлено академиком РАН Д. В. Трещевым

Получено 09.07.2024 г.

После доработки 18.09.2024 г.

Принято к публикации 30.10.2024 г.

Для класса дифференциальных уравнений типа Эмдена—Фаулера исследуется структура семейства субдоминантных и сингулярных непродолжаемых решений, имеющих промежуточные ВКБ-асимптотики.

Ключевые слова: уравнение типа Эмдена—Фаулера, обобщенное преобразование Лиувилля, субдоминантные и сингулярные решения, промежуточная асимптотика.

DOI: 10.31857/S2686954324060048, EDN: KLPZRI

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается асимптотическое поведение решений уравнений типа Эмдена—Фаулера (см. [1])

$$y''(x) - Q(x)|y(x)|^\lambda \operatorname{sign} y(x) = 0, \quad (1)$$

где коэффициент $Q(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}_+$ и параметр $\lambda > 1$. Всюду в дальнейшем будем рассматривать класс уравнений (1), для которых выполняется условие

$$\int_0^\infty \{ |Q''(x)| Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} + Q'(x)^2 Q(x)^{-(2\lambda+8)/(\lambda+3)} \} dx < \infty, \quad (2)$$

и, как следствие этого,

$$\int_0^\infty Q(x)^{2/(\lambda+3)} dx = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} = 0.$$

Сходимость интеграла (2) в случае $\lambda = 1$ — известное условие существования у соответствующего уравнения (1) ВКБ-решений (см. [2, 3]) с асимптотиками $Q(x)^{-1/4} \exp\left(\pm \int_0^x \sqrt{Q(t)} dt\right)$ при $x \rightarrow \infty$.

Согласно [4] (теоремы 1 и 4), если $\liminf_{x \rightarrow \infty} Q(x) x^{\lambda+1} > 0$, то при фиксированном $y(0) > 0$ уравнение (1) имеет единственное определенное на $\mathbb{R}_+$ ограниченное и монотонно убывающее решение $y_0(x) > 0$. При этом любое другое решение

$y(x) > 0$ уравнения (1) — непродолжаемое на $\mathbb{R}_+$ и сингулярное, то есть существует $c > 0$ такое, что $y(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow c - 0$. В соответствии с этим решение $y_0(x)$ будет называться субдоминантным.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ
РЕЗУЛЬТАТОВ

Введем следующие обозначения

$$q(x) = Q(x)^{-1/(\lambda+3)}, \quad \xi(x) = \int_0^x q(t)^{-2} dt,$$

$$A(x) = q''(x) q(x)^3 \xi(x)^2$$

и, кроме того, положим $\gamma = \frac{2(1+\lambda)}{(\lambda-1)^2}$ и $\alpha = \frac{3+\lambda}{\lambda-1}$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (2). Если

$$C_1 = \liminf_{x \rightarrow \infty} A(x) + \gamma > 0, \quad C_2 = \limsup_{x \rightarrow \infty} A(x) + \gamma < \infty,$$

то любое субдоминантное решение $y_0(x) > 0$ уравнения (1) имеет вид

$$y_0(x) = Q(x)^{-1/(\lambda+3)} \left(\int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right)^{2/(1-\lambda)} v(x), \quad (3)$$

где $\liminf_{x \rightarrow \infty} v(x) \geq C_1^{1/(\lambda-1)}$ и $\limsup_{x \rightarrow \infty} v(x) \leq C_2^{1/(\lambda-1)}$.

Если $C = A(\infty) + \gamma > 0$, то $v(\infty) = C^{1/(\lambda-1)}$, причем для произвольного $\mu \in (1, \lambda)$

$$v(x(\xi)) C^{1/(1-\lambda)} - 1 = O\left(\xi^{k_1} + \int_0^1 |A(x(t\xi)) - A(\infty)| t^{-k_1-1} dt + \int_1^\infty |A(x(t\xi)) - A(\infty)| t^{-k_2-1} dt\right),$$

где $k_{1,2} = \alpha/2 \mp (\alpha^2/4 + (\mu-1)C)^{1/2}$.

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия

*E-mail: ststepin@mail.ru

Условие существования предела $A(\infty)$ инвариантно относительно масштабирующих преобразований $Q(x)$. Если $Q(x) \sim x^\kappa$, где $\kappa > -(\lambda + 3)/2$, и эту асимптотику можно два раза дифференцировать, то выполнено условие (2) и

$$A(\infty) = \frac{\kappa^2 + \kappa\lambda + 3\kappa}{(2\kappa + \lambda + 3)^2} < \frac{1}{4},$$

а значение $A(\infty) = 1/4$, реализуется в случае $Q(x) \sim e^x$. Отметим, что все условия теоремы 1 выполнены, если $Q(x) \sim x^\kappa$ и $\kappa > -2$, причем

$$C = \frac{(\kappa + 2)(\kappa + \lambda + 1)(\lambda + 3)^2}{(\lambda - 1)^2(2\kappa + \lambda + 3)^2}.$$

Теорема 2. Если выполнено условие (2) и $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |A(x)| < \infty$, то для произвольного $x^* > 0$ уравнение (1) имеет сингулярное, непродолжаемое правее вертикальной асимптоты $x = x^*$, решение вида

$$y(x) = \gamma^{1/(\lambda-1)} Q(x)^{-1/(\lambda+3)} \left[\int_x^{x^*} Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right]^{2/(1-\lambda)} \times \{ 1 + O((x^* - x)^2) \} \quad (4)$$

с оценкой остатка при $x \rightarrow x^* - 0$.

По сравнению с известными результатами (см. [5] и [6], а также имеющуюся там библиографию) теоремы 1 и 2 дают квалифицированные оценки точности полученных асимптотических приближений для решений уравнения (1) и позволяют построить для них промежуточные асимптотики типа ВКБ.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИУВИЛЛЯ И ЭТАЛОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Замена независимой переменной $x = \varphi(\xi)$ и подстановка $y = \sqrt{\varphi'(\xi)} z$ приводят уравнение (1) к следующей форме

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - Q(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi)^{(\lambda+3)/2} |z|^\lambda \text{sign} z + \frac{1}{2} (S\varphi)(\xi) z = 0,$$

где $(S\varphi)(\xi) = \frac{\varphi'''(\xi)}{\varphi'(\xi)} - \frac{3}{2} \frac{\varphi''(\xi)^2}{\varphi'(\xi)^2}$ — производная Шварца. Если $\varphi(\xi)$ выбирается так, что

$$Q(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi)^{(\lambda+3)/2} = 1$$

и $\varphi(0) = 0$, то соответствующее преобразование

$$y = Q(x)^{-1/(\lambda+3)} z, \quad \xi = \int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt$$

представляет собой обобщение известного преобразования Лиувилля, используемого в случае

$\lambda = 1$. Новая независимая переменная $\xi = \xi(x)$ играет роль фазового интеграла (см. [2]), а преобразованное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - |z|^\lambda \text{sign} z + \frac{A(x(\xi))}{\xi^2} z = 0. \quad (5)$$

При фиксированном $z(0) > 0$ среди всех решений эталонного уравнения

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - |z|^\lambda \text{sign} z = 0,$$

обладающего первым интегралом $I(z, z') = z'(\xi)^2 - 2/(\lambda + 1) |z(\xi)|^{\lambda+1}$, имеется ровно одно, определенное на всем $\mathbb{R}_+$, которое стремится к нулю и получается надлежащим сдвигом решения

$$z_0(\xi) = \gamma^{1/(\lambda-1)} \xi^{2/(1-\lambda)},$$

а любое другое положительное решение из указанного семейства неограничено и продолжается вправо лишь до некоторой вертикальной асимптоты $\xi = c$, причем

$$z(\xi) \sim \gamma^{1/(\lambda-1)} (c - \xi)^{2/(1-\lambda)}, \quad \xi \rightarrow c - 0.$$

4. ФАЗОВЫЙ ИНТЕГРАЛ И УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ

Утверждение 1. При выполнении условия (2) имеем $\int_0^\infty Q(x)^{2/(\lambda+3)} dx = \infty$ и, кроме того, $Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

В самом деле, интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^x Q''(t) Q(t)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} dt &= Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} - \\ &\quad - Q'(0) Q(0)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} + \\ &\quad + \frac{\lambda+5}{\lambda+3} \int_0^x Q'(t)^2 Q(t)^{-(2\lambda+8)/(\lambda+3)} dt \end{aligned}$$

и, следовательно, при условии (2) существует $\lim_{x \rightarrow \infty} Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} < \infty$. Допустим, что $\int_0^\infty Q(x)^{2/(\lambda+3)} dx < \infty$, тогда $Q'/Q \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и, стало быть, существует $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) > 0$, что противоречит сделанному допущению. Допустим теперь, что $\lim_{x \rightarrow \infty} Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} \neq 0$, тогда ввиду доказанного $Q'^2 Q^{-(2\lambda+8)/(\lambda+3)} \notin L_1(\mathbb{R}_+)$ и мы приходим к противоречию с (2).

Условие ограниченности величины $A(x)$ означает определенную регулярность поведения на бесконечности коэффициента $Q(x)$ уравнения (1). Иногда накладывается требование существования конечного предела $A(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} A(x)$. Достаточное условие этого дает

Утверждение 2. Пусть выполнено условие (2) и существует $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q''(x)Q(x)}{Q'(x)^2} = \eta$. Тогда $A(\infty) = \frac{\rho}{(1+\rho)^2}$, где $\rho = 1 + (\lambda + 3)(1 - \eta)$.

Действительно, имеем

$$A(x) = \frac{q''(x)q(x)}{q'(x)^2} \left(q(x)q'(x) \int_0^x q(t)^{-2} dt \right)^2,$$

где $q(x)q'(x) \rightarrow 0$ и $\int_0^x q(t)^{-2} dt \rightarrow \infty$ согласно утверждению 1, и кроме того,

$$\frac{q''(x)q(x)}{q'(x)^2} = 1 + (\lambda + 3) \left\{ 1 - \frac{Q''(x)Q(x)}{Q'(x)^2} \right\} \rightarrow \rho$$

при $x \rightarrow \infty$. С учетом этого вычисляется предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} q(x)q'(x) \int_0^x q(t)^{-2} dt &= \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{q''(x)q(x)}{q'(x)^2} \right\}^{-1} = -\frac{1}{1+\rho}. \end{aligned}$$

5. АСИМПТОТИКА СУБДОМИНАНТНОГО РЕШЕНИЯ

В рассматриваемом случае, когда $y(x) > 0$, с помощью замены Ливуилля преобразуем (1) к виду (5) и, сделав подстановку $z(\xi) = \xi^{2/(1-\lambda)} u(\xi)$, в результате будем иметь

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{4}{1-\lambda} \xi^{-1} \frac{du}{d\xi} + \{\gamma + A(x(\xi))\} \xi^{-2} u - \xi^{-2} u^\lambda = 0.$$

Вводя новую независимую переменную $s = \ln \xi$, получим уравнение

$$\frac{d^2 u}{ds^2} - \alpha \frac{du}{ds} + a(s)u - u^\lambda = 0, \quad (6)$$

где $a(s) = \gamma + A(x(e^s))$, причем решению $u_0(x)$ уравнения (1) соответствует определенное на всем $\mathbb{R}_+$ решение $u_0(s) > 0$ уравнения (6).

Предложение 1. Пусть $u_0(s) > 0$ — определенное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (6), где $\lambda > 1$, $\alpha \geq 0$ и $0 < \tilde{C}_1 \leq a(s) \leq \tilde{C}_2 < \infty$. Тогда

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} u_0(s) \geq \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}, \quad \limsup_{s \rightarrow \infty} u_0(s) \leq \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}.$$

В самом деле, при достаточно больших s интегральная кривая, отвечающая решению $u_0(s)$, не пересекает прямые $y = \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}$ и $y = \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$. В случае, когда рассматриваемая интегральная кривая расположена выше прямой $y = \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$ или ниже прямой $y = \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}$, решение $u_0(s)$ монотонно начиная с некоторого s и, стало быть, существует предел $\lim_{s \rightarrow \infty} u_0(s) = T$. Если $T > \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$, то

$$u_0''(s) - \alpha u_0'(s) \geq \frac{1}{2} (T^\lambda - \tilde{C}_2 T) > 0$$

при достаточно больших s и, как следствие, $u_0(s)$ неограниченно возрастает. При этом

$$\left(u_0'(s)^2 - \frac{1}{\lambda+1} u_0(s)^{\lambda+1} \right)' \geq 0,$$

что исключает возможность $T = \infty$. Если $0 < T < \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}$, то

$$u_0''(s) - \alpha u_0'(s) \leq \frac{1}{2} (T^\lambda - \tilde{C}_1 T) < 0$$

при достаточно больших s ; если же $T = 0$, то $u_0''(s) = \alpha u_0'(s) + u_0(s) (u_0(s)^{\lambda-1} - a(s)) < 0$ начиная с некоторого s . В обоих случаях $u_0(s)$ неограниченно убывает, что невозможно, поскольку $u_0(s) > 0$. Таким образом приходим к следующему заключению: либо

$$\tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)} \leq u_0(s) \leq \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$$

при достаточно больших s , либо $u_0(s) \downarrow \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$ или $u_0(s) \uparrow \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}$, что завершает доказательство.

Замечание 1. В случае $\lambda = 3$ и $\alpha = 0$ уравнение (6) с коэффициентом

$$a(s) = (b + \cos s)^2 + \frac{\cos s}{b + \cos s}, \quad b > 2,$$

осциллирующим между $\tilde{C}_2 = (b+1)^2 + \frac{1}{b+1}$ и $\tilde{C}_1 = (b-1)^2 - \frac{1}{b-1} > 0$, имеет решение $u_0(s) = b + \cos s$. Данный пример показывает, насколько границы изменения $u_0(s)$, установленные в предложении 1, точны.

Первое утверждение теоремы 1 вытекает из предложения 1. В случае $C_1 = C_2 = C > 0$ после подстановки $u(s) = C^{1/(\lambda-1)}(1+w(s))$ уравнение (6) для произвольного значения параметра $\mu \in (1, \lambda)$ принимает вид

$$\frac{d^2 w}{ds^2} - \alpha \frac{dw}{ds} + (1-\mu)Cw = f[w], \quad (7)$$

где

$$f[w] = (C - a(s))(1+w) + C[(1+w)^\lambda - 1 - \mu w].$$

Поскольку $w(s) \downarrow 0$ или $w(s) \uparrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то знак выражения $(1+w(s))^\lambda - 1 - \mu w(s)$ совпадает со знаком $w(s)$, если $s \geq s_0$ и s_0 достаточно велико. С учетом этого редукция (7) к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} w(s) = & \left(w(s_0) - \frac{1}{k_1 - k_2} \int_{s_0}^\infty f[w](t) e^{k_2(s_0-t)} dt \right) \times \\ & \times e^{k_1(s-s_0)} + \frac{1}{k_1 - k_2} \left(\int_{s_0}^s f[w](t) e^{k_1(s-t)} dt + \right. \\ & \left. + \int_s^\infty f[w](t) e^{k_2(s-t)} dt \right) \end{aligned}$$

дает искомую оценку скорости стабилизации $v(x)$ из теоремы 1.

6. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Предложение 2. Если $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |A(x)| < \infty$, то для произвольного $c > 0$ уравнение (5) имеет непродолжаемое правее вертикальной асимптоты $\xi = c$ решение вида

$$z(\xi) = \gamma^{1/(\lambda-1)} (c - \xi)^{2/(1-\lambda)} (1 + w(\xi)),$$

где $w(\xi) = O((c - \xi)^2)$.

В самом деле, в результате подстановки

$$z(\xi) = \gamma^{1/(\lambda-1)} (c - \xi)^{2/(1-\lambda)} v(\xi),$$

где $v(\xi) > 0$, уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{4}{\lambda - 1} (c - \xi)^{-1} \frac{dv}{d\xi} + \gamma (c - \xi)^{-2} (v - v^\lambda) + \frac{A(x(\xi))}{\xi^2} v = 0,$$

которое, в свою очередь, после замены $v(\xi) = 1 + w(\xi)$ записывается в форме

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{4}{\lambda - 1} (c - \xi)^{-1} \frac{dw}{d\xi} - \frac{2(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \times \\ \times (c - \xi)^{-2} w = F_0(\xi) + F[w](\xi), \quad (8)$$

где

$$F_0(\xi) = -A(x(\xi))\xi^{-2},$$

$$F[w](\xi) = F_0(\xi)w + \gamma(c - \xi)^{-2}[(1 + w)^\lambda - 1 - \lambda w].$$

Отметим, что соответствующее (8) уравнение Эйлера с регулярной особой точкой $\xi = c$ имеет фундаментальную систему решений $(c - \xi)^{-1}$ и $(c - \xi)^{\alpha+1}$. Положим $\beta = \frac{\lambda-1}{3\lambda+1}$ и определим интегральные операторы K и $\widehat{K}$ формулами

$$Ku(\xi) = \beta \left((c - \xi)^{-1} \int_\xi^c (c - t)^2 u(t) dt - \right. \\ \left. - (c - \xi)^{\alpha+1} \int_\xi^c (c - t)^{-\alpha} u(t) dt \right),$$

$$\widehat{K}u(\xi) = \beta \left((c - \xi)^{-1} \int_\xi^c (c - t)^2 u(t) dt + \right. \\ \left. + (c - \xi)^{\alpha+1} \int_{c/2}^\xi (c - t)^{-\alpha} u(t) dt \right).$$

Решение уравнения (8) может быть построено методом итераций с использованием последовательных приближений, которые задаются рекуррентными формулами:

$$w_n = w_0 + \widehat{K}F[w_{n-1}], \quad n \leq \nu = \max\{0, [\alpha] - 2\},$$

$$w_n = w_\nu + K[F[w_{n-1}] - F[w_{\nu-1}]], \quad n > \nu,$$

где $w_0 = \widehat{K}F_0$ и $w_{-1} \equiv 0$. При этом для произвольного $c > 0$ существует такое $\delta = \delta(\lambda, c) > 0$, что

$$|w_n(\xi) - w_{n-1}(\xi)| \leq (c - \xi)^{n+2}$$

при $\xi \in (c - \delta, c)$. Таким образом приходим к заключению, что для решения

$$w(\xi) = w_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n(\xi) - w_{n-1}(\xi))$$

уравнения (8) выполнена оценка $w(\xi) = O((c - \xi)^2)$, что завершает схему доказательства.

Под действием преобразования Лиувилля решение, построенное в предложении 3, превращается в сингулярное решение $y(x)$ исходного уравнения (1) из теоремы 2, причем в качестве естественного параметра выбирается $x^* = x^*(c)$ такое, что

$$\int_0^{x^*} Q(x)^{2/(\lambda+3)} dx = c. \quad (9)$$

Замечание 2. Если $\lambda \in \mathbb{N}$, то в предположении гладкости функции $A(x)$ решение уравнения (8) в случае $\alpha \notin \mathbb{N}$, можно построить в виде формального ряда

$$w(\xi) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (c - \xi)^n$$

и найти рекуррентно все коэффициенты a_n .

В резонансном случае, когда $\alpha \in \mathbb{N}$ (это реализуется при $\lambda = 2, 3$ и 5), решение уравнения (8) имеет вид

$$w(\xi) = \sum_{n=2}^{\alpha} a_n (c - \xi)^n + \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} (c - \xi)^n (\ln(c - \xi))^m,$$

однако, если $a_{\alpha+1,1} = 0$, то решение $w(\xi)$ не содержит логарифмических слагаемых и выглядит как в нерезонансном случае. Так, например, уравнение

$$y''(x) - x^{-3}y(x)^3 = 0$$

после замены Лиувилля $y = \sqrt{x}z$ и $\xi = \ln x$ преобразуется к форме

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - z^3 - \frac{z}{4} = 0.$$

При этом $\alpha = 3$, а соответствующее решение имеет вид $z(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{\xi} v(\xi)$, где $v(\xi) = \frac{\xi/2}{\text{sh}(\xi/2)}$.

7. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ

В случае, когда $Q(x) \sim x^\kappa$ и $\kappa > -2$, с учетом утверждения 1 выберем $x_0 = x_0(\lambda)$ такое, что

$$\int_0^{x_0} Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt = C^{1/2}.$$

Если $\lambda \rightarrow 1$, то $C^{1/2} \sim 2/(\lambda - 1)$ и $x_0(\lambda) \sim (\kappa + 2)^{2/(\kappa+2)} (\lambda - 1)^{-2/(\kappa+2)}$, а построенное в теореме 1, субдоминантное решение $y_0(x)$ имеет

промежуточную (в смысле [7, 8]) асимптотику типа ВКБ.

Предложение 3. Пусть $Q(x) \sim x^\kappa$, $\kappa > -2$. Тогда для x таких, что $\xi(x) = C^{1/2} + o((\lambda - 1)^{-1/2})$ при $\lambda \rightarrow 1$, справедлива асимптотика

$$C^{1/(\lambda-1)} Q(x)^{-1/(\lambda+3)} \left(\int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right)^{2/(1-\lambda)} \sim \\ \sim Q(x)^{-1/4} \exp \left(- \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right).$$

В самом деле, для рассматриваемых значений x имеем

$$C^{1/(\lambda-1)} \xi(x)^{2/(1-\lambda)} = \\ = \exp \left(\frac{2}{1-\lambda} \ln \left[1 + C^{-1/2} \int_{x_0}^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right] \right) \sim \\ \sim \exp \left(\frac{2}{1-\lambda} C^{-1/2} \int_{x_0}^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right) \sim \\ \sim \exp \left(- \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right),$$

так что в пределе при $\lambda \rightarrow 1$ главный член (3) превращается в известную (см., например, [2]) ВКБ-асимптотику.

Если положить $c = \gamma^{1/2}$ в (9), то построенное в теореме 2, сингулярное решение $y(x)$ на удалении от асимптоты $x^* = x^*(c)$ также имеет при $\lambda \rightarrow 1$ промежуточную асимптотику типа ВКБ.

Предложение 4. Пусть $Q(x) \sim x^\kappa$, $\kappa > -2$. Тогда в случае $x^* = x^*(\gamma^{1/2})$ для больших x таких, что $\xi(x) = o((\lambda - 1)^{-1/2})$ при $\lambda \rightarrow 1$, справедлива асимптотика

$$\gamma^{1/(\lambda-1)} Q(x)^{-1/(\lambda+3)} \left[\int_x^{x^*} Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right]^{2/(1-\lambda)} \sim \\ \sim Q(x)^{-1/4} \exp \left(\int_0^x \sqrt{Q(t)} dt \right).$$

В самом деле, для рассматриваемых значений x при $\lambda \rightarrow 1$ имеем

$$\gamma^{1/(\lambda-1)} \left[\int_x^{x^*} Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right]^{2/(1-\lambda)} = \\ = \exp \left(\frac{2}{1-\lambda} \ln \left[1 - \gamma^{-1/2} \int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right] \right) \sim \\ \sim \exp \left(\frac{2}{\lambda-1} \gamma^{-1/2} \int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right) \sim \\ \sim \exp \left(\int_0^x \sqrt{Q(t)} dt \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
2. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
3. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
4. Кигурадзе И. Т. Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 965–986.
5. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
6. Коньков А. А. О решениях обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих вертикальную асимптоту // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 1. С. 3–14.
7. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Промежуточные асимптотики в математической физике // УМН. 1971. Т. 26. № 2. С. 115–129.
8. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

INTERMEDIATE ASYMPTOTICS FOR SOLUTIONS TO EQUATIONS OF EMDEN–FOWLER TYPE

S. A. Stepin^a, Corresponding Member of the RAS A. I. Shafarevich^a

^a Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS D. V. Treschev

For a class of Emden–Fowler type differential equations we investigate the structure of the family of subdominant and singular non-extendable solutions possessing intermediate WKB-asymptotics.

Keywords: equation of Emden–Fowler type, generalized Liouville transform, subdominant and singular solutions, intermediate asymptotics.