

УДК 519.63

ТРЕХМЕРНЫЕ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, В. И. Голубев^{1,**}, А. В. Шевченко^{1,2,***},
A. Sharma^{3,****}

Получено 29.05.2024 г.

После доработки 17.07.2024 г.

Принято к публикации 22.10.2024 г.

В настоящей работе рассматривается процесс распространения сейсмических волн в полной трехмерной постановке. Для описания напряженно-деформированного состояния геологического массива при проведении сейсмической разведки на практике широко используются акустическая и линейно упругая модели. Определяющие системы уравнений в частных производных обеих механико-математических моделей являются линейными гиперболическими. Для построения вычислительного алгоритма их решения может быть использован сеточно-характеристический подход. При этом важное место в многомерных задачах занимает использование метода расщепления по направлениям. Однако, несмотря на применение расширенных пространственных шаблонов для решения полученных одномерных задач, не удастся сохранить достигнутый повышенный порядок аппроксимации при построении итоговой трехмерной схемы. В настоящей работе предложен подход, основанный на применении схем многостадийного операторного расщепления, позволивший построить трехмерную сеточно-характеристическую схему третьего порядка аппроксимации. Численно решен ряд верификационных задач.

Ключевые слова: математическое моделирование, сейсмические волны, гиперболические системы уравнений, сеточно-характеристический метод, порядок аппроксимации, операторное расщепление.

DOI: 10.31857/S2686954324060029, EDN: KMBUKH

1. ВВЕДЕНИЕ

Сейсмическая разведка является стандартным методом поиска и разведки месторождений углеводородов. Открытие нетрадиционных месторождений нефти и газа, характеризующихся чрезвычайно сложной геологической структурой, выявило неприменимость существующих методик площадных измерений. Для разработки новых методик обработки полевых данных активно используется математическое моделирование процесса распространения сейсмических волн в геологических средах. Оно позволяет генерировать достаточный

объем синтетических сейсмических данных от геологических моделей с заданной пространственной структурой. В связи с этим актуальной задачей является разработка новых численных методов решения прямых волновых задач.

К настоящему времени значительные усилия были приложены для разработки эффективных высокоточных вычислительных алгоритмов. Широко используются на практике: метод конечных разностей, конечных объемов, конечных и спектральных элементов, разрывный метод Галеркина, сеточно-характеристический метод [1–4]. Для получения четких волновых картин при использовании расчетных сеток с числом узлов, ограниченным доступными объемами оперативной памяти и вычислительных ресурсов современных многопроцессорных вычислительных систем, требуется использование схем повышенного порядка аппроксимации. Примерами построения схем третьего и четвертого порядка аппроксимации являются работы [5, 6].

Одним из способов построения вычислительных схем для решения линейных гиперболических

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская область, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

³IPS Academy, Institute of Engineering and Science, Indore, India

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: w.golubev@mail.ru, golubev.vi@mipt.ru

***E-mail: alexshevchenko@phystech.edu

****E-mail: amitsharma@ipsacademy.org

систем уравнений, которыми описывается процесс распространения сейсмических волн, является сеточно-характеристический метод. В последние годы он был успешно применен для решения ряда практических задач, включающих распространение волн в средах с различной реологией, включая анизотропные, пористые флюидонасыщенные, упруговязкопластичные и трещиноватые [7–10]. Особенностью данного подхода является простое построение явных схем повышенного порядка аппроксимации на расширенном пространственном шаблоне для одномерных линейных гиперболических задач. Подробное исследование диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем для линейного уравнения переноса представлено в работах [11, 12]. Однако, обобщение одномерных расчетных схем на двумерный и трехмерный случаи требует специального рассмотрения. Широко используемый метод пространственного расщепления [13, 14], в общем случае, не позволяет сохранить достигнутый порядок аппроксимации. Известные его модификации, такие как схема Стренга [15], ограничены вторым порядком по времени.

Одним из подходов, активно применяемых для построения схем повышенного порядка аппроксимации, является операторное расщепление [16]. В работе [17] оно использовано для построения схемы третьего порядка аппроксимации для параболической системы уравнений, описывающей электрофизиологическое поведение сердца. В работе [18] схема многостадийного операторного расщепления четвертого порядка была успешно применена для моделирования распространения сигнала в участке сердечной мышцы. Ранее нами были построены двумерные сеточно-характеристические схемы третьего и четвертого порядка аппроксимации для акустических и линейно упругих задач [19]. В настоящей работе продолжается развитие данных идей, что позволило построить новые трехмерные сеточно-характеристические схемы для систем уравнений акустики и изотропной линейно упругой среды. Проведенные серии расчетов подтвердили достижение повышенного порядка аппроксимации, совпадающего со степенью используемого интерполяционного полинома.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В настоящей работе для описания процесса распространения сейсмических волн в геологическом массиве рассматриваются две механико-математические модели сплошной среды: акустическая и изотропная линейно упругая.

Система уравнений акустики в отсутствие внешних объемных сил может быть записана в следующем виде [20]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{0}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \operatorname{div} \vec{V} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Искомые функциями координат и времени являются вектор скорости частиц $\vec{V}$ и отклонение давления p относительно равновесного значения. Механическими параметрами среды являются: скорость распространения акустических волн c и плотность ρ . Дифференциальная задача (1) доопределяется необходимыми начальными и граничными условиями.

Система уравнений изотропной линейной упругости в отсутствие внешних объемных сил может быть записана в следующем виде [20]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \|\sigma\|)^T = \vec{0}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \|I\| - \mu \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V} + (\vec{\nabla} \times \vec{V})^T) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Искомые функциями координат и времени являются вектор скорости частиц $\vec{V}$ и тензор напряжений Коши $\|\sigma\|$, рассматриваемый относительно равновесного значения. Механическими параметрами среды являются параметры Ламе λ и μ и плотность среды ρ . Отметим, что система (2) допускает решения в виде плоских продольных и поперечных волн, распространяющихся в заданном направлении со скоростями $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ и $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Дифференциальная задача (2) также доопределяется необходимыми начальными и граничными условиями.

Обе рассмотренные модели описываются линейными системами уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа.

3. СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В настоящей работе будем использовать сеточно-характеристический метод для построения численного решения описанных выше систем уравнений. Для начала рассмотрим одномерную линейную гиперболическую систему вида

$$\vec{q}_t + A \vec{q}_x = \vec{0}, \quad (3)$$

где все искомые функции объединены в один вектор неизвестных $\vec{q}$ (компоненты скорости $\vec{V}$ и давление p для акустической среды, компоненты скорости $\vec{V}$ и $\|\sigma\|$ для изотропной линейно упругой модели). При этом матрица A зависит только от параметров среды. Отметим, что нижний индекс здесь

обозначает операцию взятия частной производной по соответствующей переменной.

В силу гиперболичности системы существуют невырожденная матрица Ω , обратная к ней Ω^{-1} и диагональная матрица Λ такие, что справедливо равенство $A = \Omega^{-1}\Lambda\Omega$. Тогда, путем умножения обеих частей уравнения (3) на матрицу Ω слева, исходная система уравнений преобразуется к набору независимых линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами относительно инвариантов Римана $\vec{\omega} = \Omega\vec{q}$:

$$\vec{\omega}_t + \Lambda\vec{\omega}_x = \vec{0}. \quad (4)$$

Решение каждого линейного уравнения переноса на следующем временном слое определяется независимо при помощи полиномиальной интерполяции заданной степени по значениям на текущем слое по времени на основе характеристического свойства линейного уравнения переноса:

$$\omega_i(x, t + dt) = \omega_i(x - \lambda_i \cdot dt, t). \quad (5)$$

Здесь λ_i обозначает один элемент матрицы Λ . В данной работе использовалась широко применяющаяся сеточно-характеристическая схема третьего порядка аппроксимации с интерполяцией многочленом третьей степени на четырех узлах пространственной сетки [21]. Условие устойчивости данной схемы может быть записано в виде $dt < \frac{h}{\max_i \{|\lambda_i|\}}$, где h — шаг используемой пространственной сетки. Более подробное описание методов данного класса можно найти в работах [22].

4. ОПЕРАТОРНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ И МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Трехмерную линейную гиперболическую систему уравнений можно представить в каноническом виде

$$\vec{q}_t + A_1\vec{q}_x + A_2\vec{q}_y + A_3\vec{q}_z = \vec{0}, \quad (6)$$

причем справедливы равенства $A_i = \Omega^{-1}\Lambda\Omega_i$. Метод расщепления по направлениям основан на последовательном решении одномерных задач, полученных из исходной трехмерной задачи (6) в следующем виде

$$\vec{q}_t + A_1\vec{q}_x = \vec{0}, \quad (7.1)$$

$$\vec{q}_t + A_2\vec{q}_y = \vec{0}, \quad (7.2)$$

$$\vec{q}_t + A_3\vec{q}_z = \vec{0}. \quad (7.3)$$

Однако, данный подход, обозначаемый далее XYZ [13, 14], снижает порядок аппроксимации по времени итоговой трехмерной схемы. Введем следующие обозначения: $t^{(n+1)} = t^{(n)} + dt$, $\vec{q}^{(n)}$ — значение вектора неизвестных в момент времени $t^{(n)}$.

Общий алгоритм перехода на следующий временной слой для схем многостадийного операторного расщепления из s стадий записывается следующим образом:

Для каждой стадии $1, \dots, s$:

- вычислить решение задачи (7.1) через время $\alpha_i dt$ $t + \alpha_i \cdot dt$;
- вычислить решение задачи (7.2) на шаге $t + \beta_i \cdot dt$;
- вычислить решение задачи (7.3) на шаге $t + \gamma_i \cdot dt$.

На каждом шаге данного алгоритма в качестве начальных условий для одномерной расщепленной задачи (7.1) используются значения, рассчитанные на предыдущем дробном шаге.

Схемы многостадийного операторного расщепления однозначно представимы таблицами коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. При этом должны быть выполнены следующие условия: $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$, $\sum_{i=1}^s \beta_i = 1$, $\sum_{i=1}^s \gamma_i = 1$. Они гарантируют, что после всех шагов расщепления будет найдено решение задачи 6 в момент времени $t + dt$. Отметим, что к схемам данного вида относится и простейшая схема расщепления по направлениям XYZ . Для построения трехмерной сеточно-характеристической схемы повышенного порядка аппроксимации будем использовать схему семистадийного операторного расщепления, называемую далее $Y7-4$ [23]. В таблице 1 и таблице 2 представлены коэффициенты двух использованных в работе схем расщепления. В схеме $Y7-4$ особо отметим наличие отрицательных коэффициентов, соответствующих отрицательным шагам по времени. Для рассмотренных гиперболических задач они выполнялись при помощи выбора корректного шаблона для полиномиальной интерполяции, при этом характеристическое свойство (5) остается верным для $dt > 0$ и для $dt < 0$.

Таблица 1. Коэффициенты схемы расщепления по направлениям XYZ . Число стадий $s = 1$.

Номер стадии	α_i	β_i	γ_i
1	1	1	1

В общем случае расчет s -стадийным алгоритмом расщепления увеличивает время расчета в s раз, при этом не требуя дополнительной памяти и не снижая возможности параллелизации расчетного алгоритма. Выбранная нами в работе схема $Y7-4$ примечательна достаточно большим числом шагов с нулевыми коэффициентами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, которые не требуют проведения вычислений. Итоговое увеличение времени расчета Y при переходе от схемы XYZ к схеме $Y7-4$ может быть оценено исходя из числа требуемых шагов по координатам и необходимости уменьшения шага по времени ввиду на-

Таблица 2. Коэффициенты схемы операторного расщепления Y7-4. Число стадий $s = 7$. Здесь $\varphi_1 = \frac{1}{2^{-2^{1/3}}}$, $\varphi_2 = \frac{-2^{1/3}}{2^{-2^{1/3}}}$.

Номер стадии	α_i	β_i	γ_i
1	0	0	$\varphi_1/2$
2	0	$\varphi_1/2$	0
3	φ_1	$\varphi_1/2$	$(\varphi_1 + \varphi_2)/2$
4	0	$\varphi_2/2$	0
5	φ_2	$\varphi_2/2$	$(\varphi_1 + \varphi_2)/2$
6	0	$\varphi_1/2$	0
7	φ_1	$\varphi_1/2$	$\varphi_1/2$

личия коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i > 1$. Таким образом, $\Upsilon = \frac{13}{3}|\alpha_5| \approx 7,4$ раза.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В работе было проведено численное исследование порядка сходимости представленного вычислительного алгоритма на тестовых задачах акустики и изотропной линейной упругости. На первом этапе была решена модельная акустическая задача в кубе $[0, l]^3$ с периодическими граничными условиями и начальным условием вида (см. рис. 1)

$$p(x, y, z) = \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l}z\right), \quad (8)$$

$$\vec{v}(x, y, z, 0) = \vec{0}.$$

Использовались следующие параметры: размер области $l = 100$ м, скорость распространения волн

$c = 1500$ м/с, плотность среды $\rho = 1000$ кг/м³, моделируемое время $T = 0,07$ с. Для данной задачи известно аналитическое решение

$$p(x, y, z, T) = \sin kx \sin ky \sin kz \cos\left(\frac{2\sqrt{3}\pi c}{l}T\right). \quad (9)$$

Для численного исследования сходимости алгоритма была получена последовательность численных решений на измельчающихся в два раза по пространству сетках с уменьшающимся в два раза шагом по времени dt . Разница между численным решением и аналитическим решением определялась по двум нормам: $\|g\|_{L_1} = \sum_i |g_i| \cdot h^3$, $\|g\|_{L_{inf}} = \max_i |g_i|$. Эмпирическая оценка порядка сходимости может быть найдена по формуле $p = \log_2 \frac{E_{2h}}{E_h}$, где E_h — норма разности аналитического решения и численного, полученного на сетке с шагом h . Для задачи акустики ошибка вычислялась по значениям поля давления. Полученные результаты для двух сопоставляемых схем расщепления приведены в таблицах 3 и 4 и на рис. 1. Они подтверждают достижение третьего порядка сходимости предложенной в работе многостадийной схемой.

На втором этапе были проведены тесты на задаче о плоской сейсмической волне, распространяющейся в среде в направлении заданного вектора $\vec{n} = (3/4; \sqrt{3}/4; 1/2)$, ($|\vec{n}| = 1$), не совпадающем с осями расчетной сетки. Волна была задана в виде начального условия в полосе шириной $l = 200$ м с формой импульса $f = \sin^4(\pi\xi/l)$, что обеспечивает достаточную гладкость решения во всей расчетной области. Для уравнений акустики рассматривалась только продольная волна

Таблица 3. Результаты исследования сходимости для схемы с расщеплением XYZ на модельной акустической задаче с периодическими граничными условиями.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
10.000	2.1787e+04	8.0364e-02	—	—
5.000	4.7420e+03	1.8841e-02	2.200	2.093
2.500	1.0009e+03	3.9032e-03	2.244	2.271
1.250	2.2377e+02	8.6861e-04	2.161	2.168
0.625	5.2523e+01	2.0363e-04	2.091	2.093

Таблица 4. Результаты исследования сходимости для схемы с расщеплением Y7-4 на модельной акустической задаче с периодическими граничными условиями.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
10.000	3.3676e+04	1.2422e-01	—	—
5.000	5.5839e+03	2.2186e-02	2.592	2.485
2.500	7.3416e+02	2.8631e-03	2.927	2.954
1.250	9.2680e+01	3.5977e-04	2.986	2.992
0.625	1.1609e+01	4.5027e-05	2.997	2.998

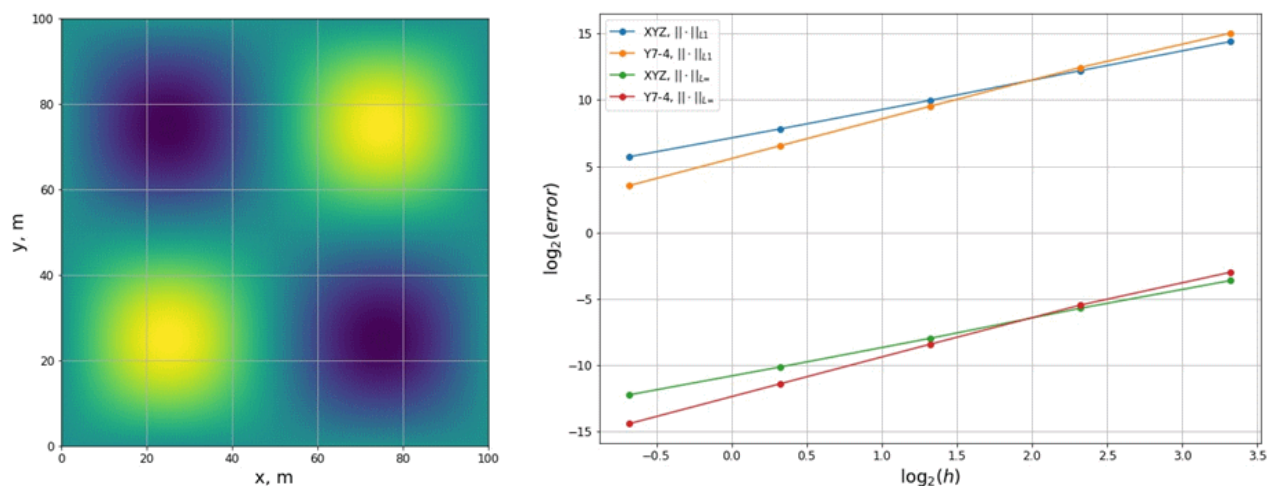


Рис 1. (слева) Начальное распределение давления, сечение плоскостью $Z = l/2$; (справа) Зависимости ошибок численного решения от шага сетки по двум нормам.

(скорость распространения волн $c = 3000$ м/с, плотность среды $\rho = 2000$ кг/м³), для уравнений упругости — продольная и поперечная волны (скорость распространения продольных волн $c_P = 3000$ м/с, скорость распространения поперечных волн $c_S = 2000$ м/с, плотность среды $\rho = 2000$ кг/м³). Начальное распределение давления в акустической модели приведено на рис. 2. Для указанных задач известно аналитическое решение. Оно является соответствующей плоской волной, переместившейся в направлении $\vec{n}$ на расстояние cT , где c — скорость распространения волны (продольной или поперечной), T — моделируемое время. В настоящей работе было задано значение $T = 0,342$ с. Ошибка измерялась только в подобласти, не подверженной влиянию граничных условий (использовались условия нулевых нормальных производных решения, задаваемые с помощью процедуры константой экстраполя-

ции [24]), по давлению в акустическом случае и по норме (абсолютному значению) вектора скорости в упругом случае. Результаты проведенного исследования приведены в таблицах 5–8. Анализ полученных результатов подтверждает достижение построенной трехмерной расчетной схемой третьего порядка сходимости.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен процесс распространения сейсмических волн в полной трехмерной постановке. Для описания динамического поведения геологической среды предложено использовать модели акустической и линейно упругой среды. Построена трехмерная сеточно-характеристическая схема повышенного порядка аппроксимации. Для преодоления снижения порядка аппроксимации по времени при использовании метода расщепления по направлениям использована схема семистадион-

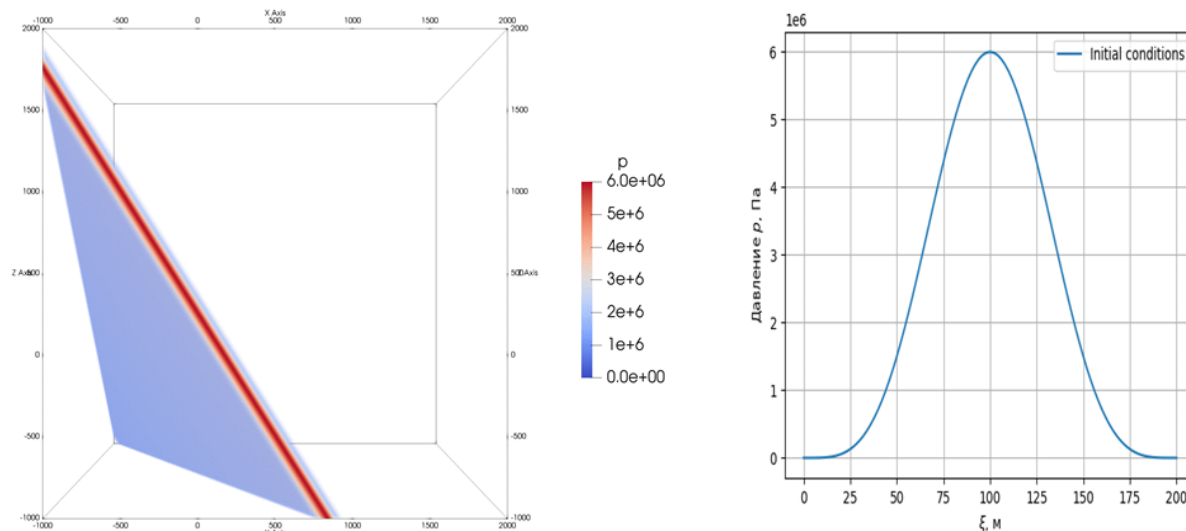


Рис 2. (слева) Начальное пространственное распределение давления для акустической задачи о плоской волне; (справа) Значение давления вдоль направления распространения плоской волны.

Таблица 5. Результаты исследования сходимости схемы с расщеплением XYZ на акустической модели для задачи о плоской волне.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
20.0	1.2020e+14	9.2584e+05	—	—
10.0	2.5820e+13	2.1538e+05	2.219	2.104
5.0	4.9065e+12	4.1034e+04	2.396	2.392
2.5	1.0578e+12	8.9723e+03	2.214	2.193

Таблица 6. Результаты исследования сходимости схемы с расщеплением $Y7-4$ на акустической модели для задачи о плоской волне.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
20.0	1.7491e+14	1.2528e+06	—	—
10.0	3.8779e+13	3.0912e+05	2.173	2.019
5.0	5.6381e+12	4.4184e+04	2.782	2.807
2.5	7.1806e+11	5.6125e+03	2.973	2.977

Таблица 7. Результаты исследования сходимости схемы с расщеплением $Y7-4$ на продольной волне в модели линейной упругости.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
20.0	3.5278e+07	2.4774e-01	—	—
10.0	8.6496e+06	6.8802e-02	2.028	1.848
5.0	1.2884e+06	1.0406e-02	2.747	2.725
2.5	1.6570e+05	1.3288e-03	2.959	2.969

Таблица 8. Результаты исследования сходимости схемы с расщеплением $Y7-4$ на поперечной волне в модели линейной упругости.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
20.0	1.2527e+07	3.7558e-01	—	—
10.0	2.8498e+06	1.0074e-01	2.136	1.898
5.0	4.1124e+05	1.5812e-02	2.793	2.672
2.5	5.2117e+04	1.9898e-03	2.980	2.990

го операторного расщепления. На задачах о распространении плоских продольных и поперечных волн эмпирически подтверждено достижение заявленного порядка сходимости. Отметим, что снижение при этом скорости расчетов в $Y \approx 7,4$ раз соответствует измельчению расчетной сетки примерно в 1,6 раз при использовании схемы расщепления XYZ . Таким образом, применение построенной схемы при решении задач на подробных расчетных сетках обосновано.

В данной работе авторами не исследовался вопрос возможности повышения порядка аппроксимации трехмерной схемы выше третьего. Однако, представляется возможным развитие представленного подхода с использованием схем многостадий-

ного операторного расщепления с большим числом стадий. Отметим также, что сохранение порядка аппроксимации не только во внутренних точках расчетной области, но и на ее границе, также является важным свойством расчетных схем. Вероятно, исследование данного вопроса может являться направлением дальнейших исследований.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-49-02002, <https://rscf.ru/project/24-49-02002/>.

Авторы признательны профессору Raymond Spiteri из University of Saskatchewan за плодотвор-

ные дискуссии по схемам многостадийного операторного расщепления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moczko P., Kristek J., Kristekova M., Valovčan J., Galis M., Gregor D. Material Interface in the Finite-Difference Modeling: A Fundamental View. Bulletin of the Seismological Society of America. 2022. V. 113. № 1. P. 281–296.
2. Duru K., Rannabauer L., Gabriel A.-A., Ling O., Igel H., Bader M. A stable discontinuous Galerkin method for linear elastodynamics in 3D geometrically complex elastic solids using physics based numerical fluxes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2022. V. 389. P. 114386.
3. Vogl C., Leveque R. A High-Resolution Finite Volume Seismic Model to Generate Seafloor Deformation for Tsunami Modeling. Journal of Scientific Computing. 2017. V. 73. P. 1204–1215.
4. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 2018. 287 с.
5. Dovgilevich L., Sofronov I. High-accuracy finite-difference schemes for solving elastodynamic problems in curvilinear coordinates within multiblock approach. Appl. Numer. Math. 2015. V. 93. P. 176–194.
6. Nishikawa H., Van Leer B. Towards high-order boundary procedures for finite-volume and finite-difference schemes. 2023. <https://doi.org/10.2514/6.2023-1605>
7. Khokhlov N. I., Favorskaya A., Furgailo V. Grid-Characteristic Method on Overlapping Curvilinear Meshes for Modeling Elastic Waves Scattering on Geological Fractures. Minerals. 2022. V. 12. P. 1597.
8. Петров И. Б., Голубев В. И., Петрухин В. Ю., Никитин И. С. Моделирование сейсмических волн в анизотропных средах. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 1. С. 59–64.
9. Петров И. Б., Голубев В. И., Шевченко А. В. О задаче акустической диагностики прискважинной зоны. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 492. № 1. С. 92–96.
10. Голубев В. И., Никитин И. С., Бураго Н. Г., Голубева Ю. А. Явно-неявные схемы расчета динамики упруговязкопластических сред с малым временем релаксации. Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 1. С. 1–11.
11. Головизнин В. М., Соловьев А. В. Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа. М.: МАКС Пресс, 2018. 198 с.
12. Головизнин В. М., Соловьев А. В. Диссипативные и дисперсионные свойства разностных схем для линейного уравнения переноса на мета-шаблоне 4×3 . Матем. моделирование, 33:6 (2021), 45–58; Math. Models Comput. Simul., 14:1 (2022), 28–37.
13. Trotter H. F. Approximation of semi-groups of operators. Pac. J. Math. 1958. V. 8. No. 4. P. 887–919.
14. Godunov S. K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. Mat. Sb. 1959. V. 89. № 3. P. 271–306.
15. Strang G. On the construction and comparison of difference schemes. SIAM J. Numer. Anal. 1968. V. 5. P. 506–517.
16. Ruth R. D. A canonical integration technique. IEEE Trans. Nuclear Sci. 1983. V. 30. P. 2669–2671.
17. Cervi J., Spiteri R. High-Order Operator Splitting for the Bidomain and Monodomain Models. SIAM Journal on Scientific Computing. 2018. V. 40. № 2. P. A769–A786.
18. Cervi J., Spiteri R. A comparison of fourth-order operator splitting methods for cardiac simulations. Applied Numerical Mathematics. 2019. V. 145. P. 227–235.
19. Golubev V. I., Shevchenko A. V., Petrov I. B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting. Computer Research and Modeling. 2022. V. 14. № 4. P. 899–910.
20. Sedov L. I. Course in Continuum Mechanics (Nauka, Moscow, 1970; Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971), V. 1.
21. Rusanov V. V. Difference schemes of the third order of accuracy for the forward calculation of discontinuous solutions. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1986. V. 180. № 6. P. 1303–1305.
22. Kholodov A. S. The construction of difference schemes of increased order of accuracy for equations of hyperbolic type. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1980. V. 20. № 6. P. 234–253.
23. Auzinger W., Koch O., Thalhammer M. Defect-based local error estimators for high-order splitting methods involving three linear operators. Numer. Algor. 2015. V. 70. P. 61–91.
24. Петров И. Б., Голубев В. И., Шевченко А. В., Никитин И. С. Об аппроксимации граничных условий повышенного порядка в сеточно-характеристических схемах. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514. № 1. С. 52–58.

THREE-DIMENSIONAL GRID CHARACTERISTIC SCHEMES OF HIGH ORDER OF APPROXIMATION

Corresponding Member of the RAS I. B. Petrov^a, V. I. Golubev^a, A. V. Shevchenko^{a,b}, A. Sharma^c

^a *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^c *IPS Academy, Institute of Engineering and Science, Indore, India*

This paper examines the process of the seismic wave propagation in a full three-dimensional case. To describe the stress-strain state of a geological medium during seismic exploration, acoustic and linear elastic models are widely used in practice. The governing systems of partial differential equations of both models are linear hyperbolic. To construct a computational algorithm for solving them, a grid-characteristic approach can be used. In this case, an important question in multidimensional problems relates to the use of the splitting method. However, despite the use of extended spatial stencils to solve the resulting one-dimensional problems, it is not possible to preserve the achieved approximation order when constructing the final three-dimensional scheme. In this paper, we propose an approach based on the multi-stage operator splitting schemes, which made it possible to construct a three-dimensional grid-characteristic scheme of the third approximation order. Given verification problems were solved numerically.

Keywords: mathematical modeling, seismic waves, hyperbolic systems of equations, grid-characteristic method, order of approximation, operator splitting.