

Р-ФАКТОР ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ

© 2024 г. Академик РАН Ю. Г. Евтушенко^{1,*}, А. А. Третьяков^{1,2,3,**}

Получено 15.08.2024 г.

После доработки 15.08.2024 г.

Принято к публикации 14.10.2024 г.

В статье рассматривается новый метод интерполяции нелинейных функций на отрезке, так называемый p -фактор метод интерполяции. Показывается на примере интерполяционного полинома Ньютона, что в случае вырождения аппроксимируемой функции $f(x)$ в решении, классическая интерполяция не дает необходимой точности для поиска приближенного решения уравнения $f(x) = 0$, в отличие от невырожденного регулярного случая. В свою очередь, использование p -фактор интерполяционных полиномов для аппроксимации функций с целью получения нужного приближенного решения уравнения дает необходимый порядок точности по аргументу при вычислениях. Полученные результаты базируются на конструкциях теории p -регулярности и аппарата p -фактор операторов, эффективно используемых при исследовании вырожденных отображений.

Ключевые слова: аппроксимация, p -фактор интерполяция, полином, вырожденность, решение, p -регулярность.

DOI: 10.31857/S2686954324060016, **EDN:** KMDSNZ

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассматриваем одно из последних применений теории p -регулярности — аппроксимацию вырожденных функций новым классом полиномов, так называемыми p -фактор интерполяционными полиномами (или p -фактор интерполяционными полиномами Ньютона). Существует большое число работ, посвященных аппроксимации и интерполяции функций полиномами (см., например, [1–11]). Однако, при интерполяции вырожденных функций может теряться порядок аппроксимации аргументов функций. Например, решения уравнений с исходной функцией и аппроксимирующим полиномом могут существенно отличаться и быть на порядок меньше, нежели порядок приближения функции. Мы это покажем ниже.

Рассмотрим аппроксимацию функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Ньютона, так как идеологически он является основополагающим для построения других видов полиномов интерполяции.

2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ НЬЮТОНА

Пусть $f(x) \in C^{p+1}([a, b])$, где $[a, b]$ некоторый отрезок, на котором мы аппроксимируем функцию $f(x)$. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где $x \in [a, b]$. Для некоторого $\Delta x > 0$ определим точки x_i , $i = 0, \dots, n$ следующим образом:

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad \dots, \quad x_n = x_{n-1} + \Delta x = b.$$

Пусть $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Задача интерполяции состоит в построении полинома $W_n(x)$ степени n такого, что $W_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, и который дает хорошую аппроксимацию функции $f(x)$ и ее аргументов. Здесь имеется ввиду близость аргументов решения уравнения $W(x) = 0$ и $f(x) = 0$. Пусть $\varepsilon = \Delta x$ достаточно малое и такое, что $|f(x) - W_n(x)| \leq c\varepsilon$, где $c > 0$ независимая от ε константа. Предположим, что уравнение $f(x) = 0$ имеет решение $x^* \in (a, b)$ и уравнение $W_n(x) = 0$ имеет решение $\tilde{x} \in (a, b)$. Наша цель, используя интерполяцию полиномом $W_n(x)$, получить решение $\tilde{x}$ с точностью до $\sim \varepsilon^2$ по отношению к x^* , т.е.

$$|\tilde{x} - x^*| \leq c\varepsilon^2, \quad (2)$$

¹Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

²Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland

³Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

*E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**E-mail: prof.tretyakov@gmail.com

где $\bar{c} > 0$ независимая от ε константа. Таким образом получить аппроксимацию аргумента решения x^* с точностью до ε^2 . В регулярном случае, т.е. когда $f'(x^*) \neq 0$, оценка (2) может быть получена на основе использования интерполяционных полиномов Ньютона с $\Delta x = \varepsilon$, что покажем ниже в теореме 1.

Однако для вырожденных функций ситуация сложнее и соотношение (2) может нарушаться существенно. Скажем для функции $f(x) = x^3$, $x^* = 0$, полином Ньютона первой степени $W_1(x) = \frac{2}{27}\varepsilon^3 + \frac{\varepsilon^2 x}{3}$ на отрезке $\left[-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{2}{3}\varepsilon\right]$, $\Delta x = \varepsilon$, где $a = -\frac{\varepsilon}{3}$, $b = \frac{2}{3}\varepsilon$. Погрешность аппроксимации функции будет

$$|f(x) - W_1(x)| \sim \varepsilon^3, \quad x \in [a, b], \quad (3)$$

а $W_1(x) = 0$ дает $\tilde{x} = -\frac{2}{9}\varepsilon$, т.е. $|\tilde{x} - x^*| \sim \varepsilon$. Порядок аппроксимации по аргументу хуже на 2 единицы по сравнению с порядком аппроксимации функции (3).

Напомним, что интерполяционный полином Ньютона степени n с узлами интерполяции

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

определяется, как

$$\begin{aligned} W_n(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad \dots + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \omega_k(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\omega_0(x) = 1$, $\omega_i(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$, $i = 1, \dots, n$. Коэффициенты α_k называются разделенными разностями и определяются соотношениями

$$\alpha_k = [y_0, \dots, y_k], \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

где $[y_k] = y_k$, $k = 0, 1, \dots, n$,

$$[y_k, \dots, y_{k+j}] = \frac{[y_{k+1}, \dots, y_{k+j}] - [y_k, \dots, y_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k},$$

$$k = 0, \dots, n-1, j = 1, \dots, n-k.$$

В регулярном случае $f'(x^*) \neq 0$ будет справедлива следующая теорема

Теорема 1. Пусть уравнение $f(x) = 0$, $f \in C^2([a, b])$ имеет решение $x^* \in (a, b)$, где функция f — регулярна в точке x^* , т.е. $f'(x^*) \neq 0$ и $W_n(x)$ интерполяционный полином Ньютона для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, причем $\varepsilon = \Delta > 0$ достаточно малое, так что $|f(x) - W_n(x)| \leq c_1 \varepsilon$.

Тогда уравнение $W_n(x) = 0$ имеет решение $\bar{x} \in (a, b)$ такое, что $|\bar{x} - x^*| \leq c_2 \varepsilon^2$. Здесь $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — независимые от ε константы.

Доказательство этой теоремы в том или ином виде можно найти в многочисленной литературе, например, [1], и аналогично доказательству сходимости метода Ньютона, поэтому мы его опускаем. Однако для нашего случая $f(x) = x^3$, $x^* = 0$, функция $f(x)$ вырождена в точке $x^* = 0$ до второго порядка включительно, т.е. $f^{(i)}(x^*) = 0$, $i = 1, 2$, и теорема 1 не будет верна.

Пример 1. Цель данного примера исследовать, дает ли аппроксимация функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Ньютона с порядком ε оценку погрешности по аргументу (2). Рассмотрим отрезок $[a, b]$, где $a = -\frac{1}{3}\varepsilon$, $b = \frac{2}{3}\varepsilon$ и полином $W_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0)$, а коэффициенты α_0 и α_1 определены по формуле (5). Узлы интерполяции $x_0 = a = -\frac{1}{3}\varepsilon$, $x_1 = b = \frac{2}{3}\varepsilon$. Вычисление коэффициентов дает $\alpha_0 = f(x_0) = -\frac{\varepsilon^3}{27}$, $\alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\varepsilon^2}{3}$. Следовательно, интерполяционный полином Ньютона имеет вид:

$$W_1(x) = -\frac{\varepsilon^3}{27} + \frac{\varepsilon^2}{3}(x + \frac{1}{3}\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^3}{27} + \frac{\varepsilon^2}{3}x$$

и $|W_1(x) - f(x)| \leq c\varepsilon$, $c > 0$ — независимая константа, $x \in [a, b]$. Решая уравнение $W_1(x) = 0$, получим $\tilde{x} = -\frac{2}{9}\varepsilon$, что не является удовлетворительным, так как

$$|\tilde{x} - x^*| = |-\frac{2}{9}\varepsilon - 0| \approx \varepsilon \gg \varepsilon^2,$$

при малых $\varepsilon > 0$, и оценка (2) не достигается. Таким образом в вырожденном случае, в отличие от невырожденного — регулярного, даже если мы имеем аппроксимацию полиномом порядка $\sim \varepsilon$, порядок аппроксимации решения будет только $\sim \varepsilon$, а не $\sim \varepsilon^2$, который нам требуется.

Далее введем некоторые понятия и определения теории p -регулярности.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ p -РЕГУЛЯРНОСТИ

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x) = 0_m, \quad (6)$$

где $F(x)$ достаточно гладкое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, т.е. $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, а x^* решение (6). (Вообще говоря, не обязательно требовать $F(x^*) = 0$).

Отображение $F(x)$ называется регулярным в точке x^* , если

$$\text{Im } F'(x^*) = \mathbb{R}^m \quad (7)$$

или, другими словами $\text{rank } F'(x^*) = m$.

Отображение F называется нерегулярным (иррегулярным, вырожденным), если условие (7) не выполнено. Пусть пространство $\mathbb{R}^m$ разложено в сумму подпространств

$$\mathbb{R}^m = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_p, \quad (8)$$

где $Y_1 = \text{Cl}(\text{Im } F'(x^*))$ и $Z_1 = \mathbb{R}^m$. Через Z_2 мы обозначим замкнутое дополнение к Y_1 и пусть $P_{Z_2}: \mathbb{R}^m \rightarrow Z_2$ оператор проектирования на Z_2 параллельно Y_1 .

Пусть $Y_2 = \text{Cl}(\text{span Im } P_{Z_2} F''(x^*)[\cdot]^2)$. В общем случае определим индуктивно

$$Y_i = \text{Cl}(\text{span Im } P_{Z_i} F^{(i)}(x^*)[\cdot]^i) \in Z_i,$$

где Z_i — замкнутое дополнение к подпространству $(Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1})$ до $\mathbb{R}^m$, $i = 2, \dots, p$ и $P_{Z_i}: \mathbb{R}^m \rightarrow Z_i$ оператор проектирования на Z_i параллельно $(Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1})$, $i = 2, \dots, p$. Окончательно $Y_p = Z_p$. Порядок p выбирается как минимальное число, для которого выполнено (8).

Определим следующие отображения

$$F_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i, \quad F_i(x) = P_{Y_i} F(x), \quad i = 1, \dots, p, \quad (9)$$

где $P_{Y_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i$ — оператор проектирования на Y_i параллельно $(Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1} \oplus Y_{i+1} \oplus \dots \oplus Y_p)$, $i = 1, \dots, p$. Тогда отображение F может быть представлено как $F(x) = F_1(x) + \dots + F_p(x)$ (или как $F(x) = (F_1(x), \dots, F_p(x))$).

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y_1 \oplus \dots \oplus Y_p)$, где $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, определенный как

$$\Psi(h) = F'_1(x^*) + F''_2(x^*)[h] + \dots + F^{(p)}_p(x^*)[h]^{p-1},$$

называется p -фактор оператором, порожденным h .

Рассмотрим следующий нелинейный оператор $\Psi_p[\cdot]^p$:

$$\Psi_p[x]^p = F'_1(x^*) + F''_2(x^*)[x]^2 + \dots + F^{(p)}_p(x^*)[x]^p.$$

Заметим, что $\Psi_p[x]^p = \Psi_p(x)[x]$.

Определение 2. p -ядро оператора Ψ_p определим как множество

$$H_p = \text{Ker } \Psi_p$$

такое, что

$$\text{Ker } \Psi_p = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \Psi_p[h]^p = 0\}.$$

Заметим, что $\text{Ker } \Psi_p = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker } F_k^{(k)}(x^*)$, где

$\text{Ker } F_k^{(k)}(x^*) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid F_k^{(k)}(x^*)[\xi]^k = 0\}$ — k -ядро оператора $F_k^{(k)}(x^*)[\cdot]^k$.

Определение 3. Отображение F называется p -регулярным в точке x^* на элементе h , если

$$\text{Im } \Psi_p(h) = \mathbb{R}^m, \quad \forall h \in H_p(x^*) \setminus \{0\}.$$

Определение 4. Отображение F называется p -регулярным в точке x^* , если оно p -регулярно на всех $h \in H_p(x^*) \setminus \{0\}$ или $H_p(x^*) = \{0\}$.

Замечание 1. В скалярном случае $F(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $m = 1$, условие p -регулярности функции $f(x)$ в точке x^* равносильно $f^{(p)}(x^*) \neq 0$.

Обозначим через $M(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = F(x^*) = 0\}$. Тогда основным результатом теории p -регулярности является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(x^*) = 0$, $F \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ и F - p -регулярно в точке x^* . Тогда $\forall \xi \in U_\varepsilon(x^*)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое, существует отображение $x(\xi): U_\varepsilon(x^*) \rightarrow \mathbb{R}^n$ и независимая константа $c > 0$ такие, что $F(\xi + x(\xi)) = 0$,

$$\text{dist}(\xi, M(x^*)) \leq \|x(\xi)\| \leq c \sum_{k=1}^p \frac{\|F_k(\xi)\|_{Y_k}}{\|\xi - x^*\|^{k-1}}$$

и

$$\text{dist}(\xi, M(x^*)) \leq \|x(\xi)\| \leq c \sum_{k=1}^p \|F_k(\xi)\|^{1/k}$$

$\forall \xi \in U_\varepsilon(x^*)$.

4. p -ФАКТОР МЕТОД РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение (6) для случая, когда $F(x)$ вырождено в решении x^* . Принципиальная схема p -фактор метода следующая:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & x_k - \{F'(x_k) + P_2 F''(x_k)h + \dots + \\ & + P_p F^{(p)}(x_k)[h]^{p-1}\}^{-1} \cdot (F(x_k) + P_2 F'(x_k)h + \\ & + \dots + P_p F^{(p-1)}(x_k)[h]^{p-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

$k = 0, 1, \dots$, $P_i = P_{Z_i}$, $i = 2, 3, \dots, p$, и h , $\|h\| = 1$, выбирается таким образом, чтобы p -фактор оператор Ψ_p был невырожден, что означает p -регулярность отображения F в точке x^* на векторе h . Для p -фактор метода (10) будет справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $F \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ и существует h , $\|h\| = 1$, такое, что p -фактор оператор Ψ_p не вырожден. Тогда для $\forall x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое, последовательность $\{x_k\}$, определенная соотношением (10), сходится к решению x^* системы (6), причем скорость сходимости будет квадратичной, т.е.

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

где $c > 0$ независимая константа.

5. p -ФАКТОР МЕТОД ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В данном разделе, мы покажем, как желаемая точность (2) решения уравнения $f(x) = 0$ в вырожденном случае может быть получена с использованием p -фактор метода интерполяции (или p -фактор интерполяции) вместо классического метода использования интерполяционных полиномов Ньютона (4)–(5) с целью нахождения приближенного решения уравнения (1) с нужной точностью. Отметим, что в этом случае p -фактор метод (10) будет следующим

$$x_{k+1} = x_k - (f'(x_k) + \dots + f^{(p)}(x_k)h^{p-1})^{-1} (f(x_k) + \dots + f^{(p-1)}(x_k)h^{p-1}). \quad (12)$$

Пусть $f \in C^{p+1}(\mathbb{R})$ вырождена в решении x^* . Для некоторого $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ построим ассоциированную с $f(x)$ p -фактор функцию $\bar{f}(x)$ по формуле

$$\bar{f}(x) = f(x) + f'(x)[h] + \dots + f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1},$$

где $h \in \mathbb{R}$, $|h| = 1$. Здесь все операторы P_i , $i = 2, \dots, p$ из формулы (10) равны 1, так как мы имеем дело со скалярным случаем и предполагаем вырождение до p -го порядка, т.е. $f'(x^*) = 0, \dots, f^{(p-1)}(x^*) = 0$ и выполнено условие p -регулярности функции $f(x)$ в точке x^* , т.е. $f^{(p)}(x^*) \neq 0$.

Подобно интерполяционному полиному Ньютона введем p -фактор интерполяционный полином Ньютона

$$\bar{W}_n(x) = \sum_{k=0}^n \bar{\alpha}_k \omega_k(x),$$

где функции $\omega_k(x)$ определены тем же способом, как в формуле (4) и коэффициенты $\bar{\alpha}_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, определяются соответственно как

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0 &= [\bar{y}_0] = \bar{f}(x_0), & [\bar{y}_1] &= \bar{f}(x_1), \\ \bar{\alpha}_1 &= [\bar{y}_0, \bar{y}_1] = \frac{[\bar{y}_1] - [\bar{y}_0]}{x_1 - x_0}, \\ &\dots \\ \bar{\alpha}_n &= [\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n] = \frac{[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] - [\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет решение $x^* \in (a, b)$. Предположим, что $f \in C^{p+1}([a, b])$ и p -регулярна в точке x^* на элементе $h \neq 0$, т.е. $f^{(p)}(x^*) \neq 0$.

Пусть $\bar{W}_n(x)$ — p -фактор интерполяционный полином Ньютона для функции $f(x)$ и $\varepsilon = \Delta > 0$ достаточно малый шаг интерполяции.

Тогда уравнение $\bar{W}_n(x) = 0$ имеет решение $\tilde{x} \in (a, b)$ такое, что

$$|x^* - \tilde{x}| \leq \bar{c} \varepsilon^2,$$

где $\bar{c} > 0$ — независимая константа.

Доказательство. Доказательство с очевидностью следует из теоремы 1, если заметить, что точка x^* также является решением уравнения

$$\bar{f}(x) = f(x) + f'(x)[h] + \dots + f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1} = 0, \quad (13)$$

т.е. $\bar{f}(x^*) = 0$. Тогда по теореме 1 для функции $\bar{f}(x)$ традиционный полином Ньютона будет как раз $\bar{W}_n(x)$. Причем $\bar{f}'(x^*) \neq 0$, что следует из p -регулярности функции $f(x)$ в точке x^* . Значит по теореме 1 существует решение $\tilde{x}$ уравнения (13), для которого будет верна оценка $|x^* - \tilde{x}| \leq c \varepsilon^2$. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что при этом решения x^* и $\tilde{x}$ локально единственные. Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. Пусть $f(x) \in C^{p+1}([a, b])$, $\bar{W}_n(\tilde{x}) = 0$, $\tilde{x} \in (a, b)$ и $f(\cdot)$ — p -регулярна в точке $\tilde{x}$ и $\varepsilon = \Delta > 0$ — достаточно малое, причем $f(\tilde{x}) \neq 0$.

Тогда для некоторого достаточно малого $\delta > 0$, вообще говоря зависящего от ε , существует точка $x^* \in U_\delta(\tilde{x})$, являющаяся решением уравнения (1), т.е. $f(x^*) = 0$, причем справедлива оценка (2).

Доказательство данного следствия аналогично доказательству существования решения уравнения $f(x) = 0$ в окрестности точки $\tilde{x}$ (такой, что $\bar{f}(\tilde{x})$ достаточно малое) при выполнении условия p -регулярности $f(x)$ в точке $\tilde{x}$, и с использованием теоремы 4 (см, например, [12]).

Пример 1 (продолжение). Чтобы применить p -фактор интерполяционный полином Ньютона для нашего примера, определим функцию $\bar{f}(x)$ для $p = 2$ и $h = 1$ как

$$\bar{f}(x) = f(x) + f'(x)[h] + f''(x)[h]^2 = x^3 + 3x^2 + 6x.$$

Теперь построим p -фактор интерполяционный полином $\bar{W}_1(x)$. Используем тот же отрезок $[a, b]$, где $x_0 = a = -\frac{1}{3}\varepsilon$ и $x_1 = b = \frac{2}{3}\varepsilon$. Определим коэффициенты

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{f}(x_0) = -\frac{1}{27}\varepsilon^3 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - 2\varepsilon$$

и

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\bar{f}(x_1) - \bar{f}(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \varepsilon + 6.$$

Тогда p -фактор интерполяционный полином будет

$$\begin{aligned} \bar{W}_1(x) &= \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1(x - x_0) = \\ &= -\frac{1}{27}\varepsilon^3 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - 2\varepsilon + \left(\frac{1}{3}\varepsilon^2 + \varepsilon + 6\right)\left(x + \frac{1}{3}\varepsilon\right) = \\ &= \left(\frac{1}{3}\varepsilon^2 + \varepsilon + 6\right)x + \frac{2}{27}\varepsilon^3 + \frac{2}{3}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Следовательно

$$|\bar{W}_1(x) - f(x)| \leq c\varepsilon, \quad c > 0,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно малое.

Решая уравнение $\bar{W}_1(x) = 0$, получаем
$$\tilde{x} = -\frac{\frac{2}{9}\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 18}.$$
 Поэтому

$$|\tilde{x} - x^*| = \left| \frac{-\frac{2}{9}\varepsilon^3 - 2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 18} - 0 \right| < \frac{\varepsilon^2}{6},$$

и мы получим желаемую точность $\sim \varepsilon^2$ решения уравнения $f(x) = 0$.

Таким образом, сравнивая использование интерполяционных полиномов $W_1(x)$ и $\bar{W}_1(x)$ для получения точности (2) решения x^* уравнения (1) для функции $f(x)$ примера 1, видно, что полином $W_1(x)$ дает хорошую аппроксимацию функции $f(x)$, т.к.

$$|W_1(x) - f(x)| \approx \varepsilon^3 \leq c_2\varepsilon, \quad c_2 > 0.$$

В то же время решение $\bar{x}$ уравнения $W_1(x) = 0$ не дает нужную точность ε^2 , т.к. $|\bar{x} - x^*| \approx \varepsilon > c_3\varepsilon^2$, $c_3 > 0$. Здесь все константы c_2, c_3 независимы от ε .

В свою очередь для p -фактор интерполяционного полинома Ньютона $\bar{W}_1(x)$ аппроксимация функции $f(x)$ будет порядка $\sim \varepsilon$

$$|\bar{W}_1(x) - f(x)| \approx \varepsilon$$

на отрезке $x \in [a, b]$. И для решения $\tilde{x}$ уравнения $\bar{W}_1(x) = 0$ мы получаем нужный порядок аппроксимации по аргументу для решения x^* , т.е.

$$|\tilde{x} - x^*| \leq \frac{1}{6}\varepsilon^2 \approx \varepsilon^2.$$

Таким образом такая точность не может быть получена с использованием классических интерполяционных полиномов, что мы проиллюстрировали на примере интерполяционного полинома Ньютона, идея которого так или иначе используется при построении интерполяционных полиномов для аппроксимации вырожденных функций.

В свою очередь, взяв в качестве x_0 любую начальную точку $x_0 \in [a, b] = [-\frac{1}{3}\varepsilon, -\frac{2}{3}\varepsilon]$, согласно схеме (12), получим

$$x_1 = x_0 - (3x_0^2 + 6x_0 + 6)^{-1}(x_0^3 + 3x_0^2 + 6x_0) \leq c|x_0 - 0|^2 \approx \varepsilon^2,$$

где $c > 0$ — независимая константа. То есть за один шаг p -фактор метода получаем приближение x_1 порядка ε^2 , т.е. $|x_1 - 0| \sim \varepsilon^2$.

Для сравнения классический метод Ньютона

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - (f'(\bar{x}_0))^{-1}f(\bar{x}_0) = \frac{2\bar{x}_0}{3} \leq c|\bar{x}_0 - 0|$$

дает всего лишь точность порядка $\sim \varepsilon$, если взять $\bar{x}_0 = x_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
2. Исмоилова М. Н., Имомова Ш. М. Интерполяция функции // Вестник науки и образования. 2020. № 3-3(81). С. 5–8.
3. Задорин А. И., Задорин Н. А. Полиномиальная интерполяция функции двух переменных с большими градиентами в пограничных слоях // Ученые записки казанского университета. Серия: физико-математические науки. 2016. Т. 158. № 1. С. 40–50.
4. Рамазанов А. Р. К., Рамазанов А. К. Аппроксимации функций с интерполяцией. М.: LAP Lambert Ac., 2012. 132 с.
5. Асташкин С. В. Интерполяция операторов и ее приложения. М.: Нобель Пресс, 2013. 188 с.
6. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
7. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
8. Половко А. М. Интерполяция. СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
9. Рассел Д. Бикубическая интерполяция. М.: VSD, 2013.
10. Рассел Д. Билинейная интерполяция. М.: VSD, 2013.
11. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 2022.
12. Prusinska A., Tret'yakov A. A Remark on the Existence of Solutions to Nonlinear Equations with Degenerate Mappings // Set-Valued Analysis. 2008. V. 16. P. 93–104.

***P*-FACTOR INTERPOLATION OF SOLUTIONS OF AN EQUATION WITH A DEGENERATE FUNCTION**

Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko^a, A. A. Tret'yakov^{a,b,c}

^a *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia,*

^b *Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland,*

^c *Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*

The paper considers a new method of interpolation of nonlinear functions on a segment, the so-called *p*-factor interpolation method. It is shown using the example of Newton's interpolation polynomial that in the case of degeneration of the approximated function $f(x)$ in the solution, classical interpolation does not provide the necessary accuracy for finding an approximate solution to the equation $f(x) = 0$, in contrast to the non-degenerate regular case. In turn, the use of *p*-factor interpolation polynomials for approximating functions in order to obtain the desired approximate solution to the equation provides the necessary order of accuracy in the argument during calculations. The obtained results are based on the constructions of the theory of *p*-regularity and the apparatus of *p*-factor operators, effectively used in the study of degenerate mappings.

Keywords: *p*-factor interpolation, polynomial, degeneracy, solution, *p*-regularity.