ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 519, с. 28–32

МАТЕМАТИКА

УДК 517.43

ВЕЩЕСТВЕННОСТЬ ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА ДЛЯ СЖАТИЙ И ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2024 г. М. М. Маламуд[1,*], Х. Найдхардт[2], В. В. Пеллер[1,3,**]

Представлено академиком РАН С. В. Кисляковым

Получено 27.04.2024 г.
После доработки 24.08.2024 г.
Принято к публикации 28.08.2024 г.

В недавних совместных работах авторов этой заметки решена известная проблема, остававшаяся открытой в течение многих лет, и, тем самым было доказано, что для произвольных сжатий в гильбертовом пространстве с ядерной разностью существует интегрируемая функция спектрального сдвига, для которой справедлив аналог формулы следов Лифшица–Крейна. Аналогичные результаты были получены и для пар диссипативных операторов. При этом в отличие от случая самосопряжённых и унитарных операторов может случиться так, что не существует вещественнозначной интегрируемой функции спектрального сдвига. В этой заметке мы анонсируем результаты, которые дают достаточные условия для существования вещественнозначной интегрируемой функции спектрального сдвига для пар сжатий. Мы также рассматриваем случай пар диссипативных операторов.

DOI: 10.31857/S2686954324050065, **EDN:** XDYVZS

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой заметке мы изучаем условия, при которых пара сжатий в гильбертовом пространстве с ядерной разностью имеет вещественозначную интегрируемую функцию спектрального сдвига на единичной окружности $\mathbb{T}$. Мы также рассматриваем случай пар диссипативных операторов.

Напомним, что в работе физика И. М. Лифшица [10] для пары самосопряжённых операторов $\{A_0, A_1\}$ в гильбертовом пространстве с ядерной разностью была введена функция спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{A_0,A_1}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и открыта формула следов

$$\operatorname{trace}\big(f(A_1) - f(A_0)\big) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\boldsymbol{\xi}_{A_0,A_1}(t)\,dt \qquad (1.1)$$

для достаточно хороших функций f на $\mathbb{R}$.

Позже М. Г. Крейн дал строгое математическое обоснование этой формулы и показал, что в случае ядерности оператора $A_1 - A_0$ функция спектрального сдвига должна быть интегрируемой вещественнозначной функцией на $\mathbb{R}$ и формула следов (1.1) имеет место для достаточно хороших функций f.

С другой стороны, Крейн заметил в [6], что правая часть формулы (1.1) определена для произвольной липшицевой функции f и поставил задачу описать максимальный класс функций f, для которых формула следов (1.1) имеет место для произвольных самосопряжённых операторов с ядерной разностью. В частности, М. Г. Крейном был задан вопрос, можно ли распространить формулу следов (1.1) на класс липшицевых функций.

Оказалось, однако, что это не так. Действительно, Ю. Б. Фарфоровская показала, что существуют липшицева функция f, самосопряжённые операторы A_0 и A_1 такие, что $A_1 - A_0 \in \boldsymbol{S}_1$, но $f(A_1) - f(A_0) \notin \boldsymbol{S}_1$[1].

Задача М. Г. Крейна была полностью решена в работе [14], в которой было показано, что максимальный класс функций f, при которых формула следов (1.1) имеет место для произвольных самосопряжённых операторов с ядерной разностью, совпадает с классом *операторно липшицевых функций* (см. обзор [2], в котором содержится обширная информация об операторно липшицевых функциях).

[1] *Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, Россия*

[2] *Берлин, Германия*

[3] *Петербургское Отделение Математического Института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия*

[*] *E-mail: malamud3m@gmail.com*

[**] *E-mail: peller@math.msu.edu*

[1] символом $\boldsymbol{S}_1$ обозначается класс ядерных операторов, см. [5]

В работе М. Г. Крейна [7] для пар унитарных операторов с ядерной разностью построена функция спектрального сдвига, которая является вещественнозначной интегрируемой функцией на единичной окружности $\mathbb{T}$ и был получен аналог формулы следов (1.1).

Перейдём теперь к формуле следов для функций от сжатий с ядерной разностью. Напомним, что оператор T в гильбертовом пространстве называется *сжатием*, если $\|T\| \leqslant 1$.

Напомним также, что функциональное исчисление Сёкефальви-Надя–Фойаша (см. [17]) для сжатия T в гильбертовом пространстве сопоставляет каждой функции f из *диск-алгебры* $\mathrm{C_A}$ функцию $f(T)$ от T; причём такое функциональное исчисление

$$f \mapsto f(T), \quad f \in \mathrm{C_A},$$

линейно и мультипликативно. При этом имеет место неравенство фон Неймана

$$\|f(T)\| \leqslant \|f\|_{\mathrm{C_A}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{|f(\zeta)| : |\zeta| \leqslant 1\}, \quad f \in \mathrm{C_A}.$$

Для обобщения формулы следов Лифшица–Крейна на случай функций от сжатий было предпринято много попыток. Речь идёт о том, чтобы для пары сжатий $\{T_0, T_1\}$ с ядерной разностью, доказать существование интегрируемой функции ξ на окружности $\mathbb{T}$, при которой имела бы место формула следов

$$\operatorname{trace}\big(f(T_1) - f(T_0)\big) = \int_{\mathbb{T}} f'(\zeta)\xi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \qquad (1.2)$$

для достаточно хороших функций f (например, для аналитических полиномов f). Такую функцию ξ естественно называть *функцией спектрального сдвига* для пары сжатий $\{T_0, T_1\}$. Следует отметить, что если такая функция ξ существует, то она отнюдь не единственна. Действительно, легко видеть, что мы можем прибавить к такой функции ξ произвольную функцию из класса Харди $\boldsymbol{H}^1$ и получим новую функцию спектрального сдвига.

Такие же задачи являются актуальными и для пар максимальных диссипативных операторов. Напомним, что плотно определённый оператор L называется *диссипативным*, если $\operatorname{Im}(Lx, x) \geqslant 0$ для любого вектора x из области определения $\mathrm{D}(L)$ оператора L. Диссипативный оператор L называется *максимальным*, если у него нет собственного диссипативного расширения.

Для знакомства с историей вопроса, начнём с работы Х. Лангера [9] 1965 года, из результатов которой вытекает существование интегрируемой функции спектрального сдвига при условии, что спектры сжатий лежат в открытом единичном круге $\mathbb{D}$. Упомянем также работы Рыбкина [15, 16], Адамяна и Найдхардта [1], а также работу М. Г. Крейна [8]. Отметим, что в работе [16] при дополнительных предположениях на пару сжатий Рыбкин показал существование A-интегрируемой комплекснозначной функции спектрального сдвига, которая не обязательно интегрируема по Лебегу.

Подчеркнём здесь, что в работе Адамяна и Найдхардта [1] существование вещественной интегрируемой функции спектрального сдвига для пары сжатий $\{T_0, T_1\}$ доказано при более сильном условии, чем ядерность разности $T_1 - T_0$, а именно при условии

$$\sum_{k \geqslant 0} s_k(T_1 - T_0) \log\left(1 + \left(s_k(T_1 - T_0)\right)^{-1}\right) < \infty \qquad (1.3)$$

(предполагается, что функция $x \mapsto x\log(1 + x^{-1})$ принимает значение 0 при $x = 0$). Из нашей теоремы 2.2 в § 2 легко вытекает, что условие (1.3) не является необходимым для существования вещественной интегрируемой функции спектрального сдвига.

Остававшаяся нерешённой в течение многих лет задача получения аналога формулы следов Лифшица–Крейна для функций от сжатий была полностью решена в работе [12] (см. также работу [11], в которой формула следов была получена при дополнительном предположении). Другое решение этой задачи получено в работе [13]. Более того, в работах [12] и [13] описан максимальный класс функций f, для которых формула следов (1.2) имеет место для произвольных пар сжатий с ядерной разностью. Этот класс совпадает с классом операторно липшицевых функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$.

Известно (см. [12]), что для сжатий с ядерной разностью не всегда существует интегрируемая вещественнозначная функция спектрального сдвига. Тем не менее, как отмечено в [13], пара сжатий с ядерной разностью всегда имеет вещественнозначную A-интегрируемую функцию спектрального сдвига.

В этой заметке мы аннонсируем достаточное условие для того, чтобы пара сжатий с ядерной разностью обладала вещественнозначной интегрируемой функцией спектрального сдвига. Недавно в работе Чаттопадхиая и Синхи [3] было показано, что если T_0 и T_1 — сжатия с ядерной разностью и T_0 — строгое сжатие, т.е. $\|T_0\| < 1$, то у пары $\{T_0, T_1\}$ существует интегрируемая вещественнозначная функция спектрального сдвига. В этой заметке, развивая идеи работы [13], мы существенно улучшаем результат работы [3]. Этому будет посвящён § 2.

Здесь также уместно упомянуть, что в работе [13] показано, что если T — сжатие, а U — унитарный оператор такие, что $U - I \in \boldsymbol{S}_1$, то пара $\{T, UT\}$ имеет вещественную интегрируемую функцию спектрального сдвига (см. лемму 9.1), а если T — сжатие, а X — сжатие такое, что $X \geqslant 0$

и $I - X \in \boldsymbol{S}_1$, то пара $\{T, XT\}$ имеет чисто мнимую интегрируемую функцию спектрального сдвига (см. лемма 9.2).

Формула следов Лифшица—Крейна была также обобщена в работах [12] и [13] на случай функций от максимальных диссипативных операторов. Если L_0 и L_1 — максимальные диссипативные операторы с ядерной разностью, то, как показано в работах [12] и [13], существует интегрируемая функция спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ такая, что имеет место формула следов

$$\operatorname{trace}\big(f(L_1) - f(L_0)\big) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\boldsymbol{\xi}(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

по крайней мере для рациональных функций f с полюсами в открытой нижней полуплоскости.

С другой стороны, если вместо условия $L_1 - L_0 \in \boldsymbol{S}_1$ мы наложим резольвентное условие

$$(\mathrm{i}I + L_1)^{-1} - (\mathrm{i}I + L_0)^{-1} \in \boldsymbol{S}_1,$$

то существует функция спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi}$ на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} |\boldsymbol{\xi}(t)| \left(1 + t^2\right)^{-1} \mathrm{d}t < \infty \tag{1.5}$$

и формула следов (1.4) имеет место для рациональных функций f с полюсами в открытой нижней полуплоскости (см. [13]).

В § 3 этой заметке мы займёмся вопросом существования вещественной функции спектрального сдвига для пар диссипативных операторов.

2. ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА ДЛЯ СЖАТИЙ

Чтобы сформулировать достаточное условие существования вещественнозначной интегрируемой функции спектрального сдвига, нам понадобятся понятия дефектных операторов сжатий. Если T — сжатие, его дефектные операторы определяются равенствами

$$D_T \stackrel{\text{def}}{=} (I - T^*T)^{1/2}, \quad \text{и} \quad D_{T^*} \stackrel{\text{def}}{=} (I - TT^*)^{1/2}.$$

Для получения основного результата этого параграфа нам понадобится следующая лемма, в которой символом $\boldsymbol{S}_p$ обозначен класс Шаттена—фон Неймана, см. [5].

Лемма 2.1. *Пусть* $0 < p < \infty$. *Предположим, что* T_0 *и* T_1 *— сжатия в гильбертовом пространстве такие, что*

$$\operatorname{Ker} D_{T_0} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{2.1}$$

и

$$(T_1 - T_0)\, D_{T_0}^{-2\alpha} \in \boldsymbol{S}_p \quad \text{и} \quad (T_1^* - T_0^*)\, D_{T_0^*}^{-2\alpha} \in \boldsymbol{S}_p \tag{2.2}$$

для некоторого числа α *из* $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$. *Тогда*

$$D_{T_1} - D_{T_0} \in \boldsymbol{S}_p \quad \text{и} \quad D_{T_1^*} - D_{T_0^*} \in \boldsymbol{S}_p. \tag{2.3}$$

Легко видеть, что каждое из включений в (2.2) влечёт, что $T_1 - T_0 \in \boldsymbol{S}_p$. Отметим также, что $\operatorname{Ker} D_{T_0} = \{\boldsymbol{0}\}$ в том и только в том случае, когда $\operatorname{Ker} D_{T_0^*} = \{\boldsymbol{0}\}$, и, стало быть, условие (2.1) может быть заменено условием $\operatorname{Ker} D_{T_0^*} = \{\boldsymbol{0}\}$.

Следующее утверждение — основной результат этого параграфа.

Теорема 2.2. *Предположим, что* T_1 *и* T_0 *— сжатия, удовлетворяющие условиям* (2.1) *и* (2.2) *при* $p = 1$. *Тогда пара* $\{T_0, T_1\}$ *обладает вещественнозначной интегрируемой функцией спектрального сдвига.*

Идея доказательства. Для того, чтобы вывести теорему 2.2 из леммы 2.1, мы воспользуемся матричной унитарной дилатацией Шеффера. Если T — сжатие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим унитарный оператор $U^{[T]}$ в пространстве $\ell^2_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_j$, $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}$, двусторонних $\mathcal{H}$-значных последовательностей, см. [17], Ch. 1, § 5 (см. также работу [13], в которой дилатации Шеффера использовались в связи с функциями спектрального сдвига для сжатий). При этом пространство $\mathcal{H}$ отождествляется с подпространством последовательностей вида $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ таких, что $v_j = \boldsymbol{0}$ при $j \neq 0$. Оператор $U^{[T]}$ определяется операторной матрицей

$$U^{[T]} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ \\ \cdots & \boldsymbol{0} & I & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & D_T & -T^* & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & T & D_{T^*} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I & \cdots \\ ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

В этой матрице матричный элемент T занимает позицию $(0,0)$. Другими словами, матричные элементы $U^{[T]}_{j,k}$ операторной матрицы $U^{[T]}$ определяются равенствами

$$U^{[T]}_{0,0} = T, \quad U^{[T]}_{0,1} = D_{T^*}, \quad U^{[T]}_{-1,0} = D_T,$$
$$U^{[T]}_{-1,1} = -T^*, \quad U^{[T]}_{j,j+1} = I \quad \text{при} \quad j \neq 0,\ -1,$$

в то время как остальные матричные элементы равны $\boldsymbol{0}$.

Легко видеть, что $U^{[T]}$ — унитарная дилатация сжатия T. Ясно, что если сжатия T_0 и T_1 удовлетворяют условиям леммы 2.1 при $p = 1$, то унитарные операторы операторы $U^{[T_0]}$ и $U^{[T_1]}$ имеют ядерную разность и, стало быть, они имеют вещественную интегрируемую функцию спектрального сдвига. Нетрудно также убедиться в том, что функция спектрального сдвига для пары $\{U^{[T_0]}, U^{[T_1]}\}$ является также функцией спектрального сдвига и для исходной пары сжатий $\{T_0, T_1\}$, откуда и вытекает утверждение теоремы 2.2. ■

Напомним, что по теореме Б. Сёкефальфи-Надя–Фояша (см. [17]) спектральная мера минимальной унитарной дилатации вполне неунитарного сжатия должна быть взаимно абсолютно непрерывной по отношению к мере Лебега на окружности. И, хотя матричная дилатация Шеффера не обязана быть минимальной, тем не менее, её спектральная мера всё равно должна быть взаимно абсолютно непрерывной с мерой Лебега (см. [13], следствие 10.2).

Замечание. Очевидно, что в случае, когда $\|T_0\| < 1$, пара $\{T_0, T_1\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2 и, стало быть, теорема 2.2 усиливает результат работы [3], упомянутый во введении.

Следствие 2.3. *Пусть T и X — сжатия такие, что $X \geqslant \mathbf{0}$ и $I - X \in \boldsymbol{S}_1$. Предположим, что выполнены условия*
$$\operatorname{Ker} D_T = \{\mathbf{0}\}$$
и
$$(I - X)T D_T^{-2\alpha} \in \boldsymbol{S}_1 \quad \text{и} \quad T^*(I - X) D_{T^*}^{-2\alpha} \in \boldsymbol{S}_1$$
для некоторого числа α из $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Тогда пара $\{T, XT\}$ имеет как вещественную интегрируемую функцию спектрального сдвига, так и чисто мнимую интегрируемую функцию спектрального сдвига.

Действительно, первая часть заключения следствия — непосредственное следствие теоремы 1, в то время как вторая часть составляет содержание леммы 9.2 работы [13], упомянутой во введении.

Отметим также, что если $\boldsymbol{\xi}$ — вещественная функция спектрального сдвига, а $\mathrm{i}\boldsymbol{\eta}$ — чисто мнимая функция спектрального сдвига, то функция $\boldsymbol{\xi} - \mathrm{i}\boldsymbol{\eta}$ входит в класс Харди H^1. При этом гармонически сопряжённые функции $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}$ интегрируемы. Если же в дополнении к этому $\boldsymbol{\xi} \geqslant \mathbf{0}$, то функция $\boldsymbol{\xi}$ удовлетворяет условию Зигмунда
$$\int_{\mathbb{T}} \boldsymbol{\xi}(\zeta) \log(1 + \boldsymbol{\xi}(\zeta))\, \mathrm{d}\boldsymbol{m}(\zeta) < \infty.$$
Напомним в связи с этим, что в работах [11] и [12] отмечено, что если пара сжатий с ядерной разностью обладает комплекснозначной функцией спектрального сдвига, которая удовлетворяет условию Зигмунда, то существует и вещественная интегрируемая функция спектрального сдвига.

В заключение параграфа отметим, что доказательство леммы 2.1 основано на следующем утверждении.

Лемма 2.4. *Пусть $0 < p < \infty$ и $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Предположим, что X и Y — операторы в гильбертовом пространстве такие, что $\mathbf{0} \leqslant X \leqslant I$, $\mathbf{0} \leqslant Y \leqslant I$ и $\operatorname{Ker} X = \{\mathbf{0}\}$. Если $Y - X \in \boldsymbol{S}_p$ и оператор $(Y - X)X^{-\alpha}$ продолжается до оператора класса $\boldsymbol{S}_p$, то $Y^{1/2} - X^{1/2} \in \boldsymbol{S}_p$.*

3. СЛУЧАЙ ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе мы укажем достаточное условие на пару $\{L_0, L_1\}$ максимальных диссипативных операторов с ядерной разностью для существования вещественнозначной функции спектрального сдвига. Тем не менее, наше условие приводит к существованию вещественнозначной функции спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi}$, которая удовлетворяет условию (1.5). Оказывается, что при наших предположениях вещественнозначная интегрируемая функция спектрального сдвига не обязана существовать. Более того, такой функции не может быть при условии $\operatorname{trace}(L_1 - L_0) \notin \mathbb{R}$.

Всюду в этом параграфе мы используем обозначение
$$V \stackrel{\text{def}}{=} L_1 - L_0.$$

Теорема 3.1. *Пусть L_0 и L_1 — ограниченные диссипативные операторы такие, что $V = L_1 - L_0 \in \boldsymbol{S}_1$ и $\operatorname{Ker} \operatorname{Im} L_0 = \{\mathbf{0}\}$. Тогда, если*
$$(L_1 - L_0)(\operatorname{Im} L_0)^{-1} \in \boldsymbol{S}_1, \tag{3.1}$$
то пара $\{L_0, L_1\}$ обладает вещественнозначной функцией спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi}$, которая удовлетворяет условию
$$\int_{\mathbb{R}} |\boldsymbol{\xi}(t)|(1 + t^2)^{-1}\, \mathrm{d}t < \infty. \tag{3.2}$$

Заметим, что согласно теореме 5.6 работы [11] для ограниченных диссипативных операторов L_0 и L_1 при условии $V \in \boldsymbol{S}_1$ всегда (т.е. без условия (3.1)) существует *интегрируемая* комплекснозначная функция спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi}$. Более того в работе [13] (см. теорему 9.6 и следствие 9.7) было показано, что интегрируемая комплекснозначная функция спектрального сдвига существует для пар диссипативных операторов с ядерной разностью даже без предположения их ограниченности. При этом, если оператор V диссипативен, то можно выбрать функцию спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi}$, удовлетворяющую неравенству $\operatorname{Im} \boldsymbol{\xi} \geqslant \mathbf{0}$. Если же оператор V самосопряжён, то функция спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi}$ может быть выбрана вещественнозначной, в то время как, если $V = -V^*$, то её можно выбрать чисто мнимой.

Теорема 3.1 дополняет этот результат, показывая, что при условии (3.1) всегда (т.е. даже без предположения самосопряжённости оператора V) можно выбрать *функцию спектрального сдвига вещественной*, удовлетворяющей условию (3.2), но не обязательно интегрируемой. В частности, в случае, когда $V = -V^*$, для пары $\{L_0, L_1\}$ при условии (3.1) существует чисто мнимая суммируемая функция спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi}_1$, а также вещественная не обязательная суммируемая функция спектрального сдвига $\boldsymbol{\xi}_2$, удовлетворяющая условию (3.2).

Как показывает следующая теорема, интегрируемая вещественнозначная функция спектрального сдвига существует далеко не всегда.

Теорема 3.2. *Пусть* $\{L_0, L_1\}$ *— пара диссипативных операторов, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1. Предположим, что* $\mathrm{trace}(L_1 - L_0) \notin \mathbb{R}$. *Тогда пара* $\{L_0, L_1\}$ *не может иметь интегрируемой вещественнозначной функции спектрального сдвига.*

Более того, если оператор V *диссипативен, то условие* $\mathrm{trace}(L_1 - L_0) \in \mathbb{R}$ *эквивалентно условию существования интегрируемой вещественнозначной функции спектрального сдвига.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счёт гранта Российского научного фонда № 23-11-00153.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adamjan V. M., Neidhardt H.* On the summability of the spectral shift function for pair of contractions and dissipative operators, J. Operator Th. **24** (1990), 187–205.
2. *Александров А. Б., Пеллер В. В.* Операторно липшицевы функции, УМН, **71:4** (2016), 3–106.
3. *Chattopadhyay A., Sinha K. B.* Trace formula for contractions and its representation in $\mathbb{D}$ J. Operator Theory **88** (2022), 275–288.
4. *Фарфоровская Ю. Б.* Пример липшицевой функции от самосопряженных операторов. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **30** (1972), 146–153.
5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М.: Москва, 1965.
6. *Крейн М. Г.* О формуле следов в теории возмущений. Матем. сб. **33:3** (1953), 597–626.
7. *Крейн М. Г.* Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов. Докл. АН СССР, **144:2** (1962), 268–271.
8. *Krein M.G.* Perturbation determinants and a trace formula for some classes of pairs of operators. J. Operator Th., **17** (1987), 129–187.
9. *Langer H.* Eine Erweiterung der Spurformel der Störungstheorie. Math. Nachr. **30** (1965), 123–135.
10. *Лифшиц И. М.* Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой. УМН, **7:1**(47) (1952), 171–180.
11. *Malamud M., Neidhardt H.* Trace formulas for additive and non-additive perturbations. Adv. Math. **274** (2015), 736–832.
12. *Маламуд М. М., Найдхардт Х., Пеллер В. В.* Аналитические операторно липшицевы функции в круге и формула следов для функций от сжатий. Функцион. анализ и его прил. **51:3** (2017), 33–55.
13. *Malamud M.M., Neidhardt H., Peller V. V.*. Absolute continuity of spectral shift. J. Funct. Anal. **276** (2019), 1575–1621.
14. *Peller V.V.* The Lifshits–Krein trace formula and operator Lipschitz functions. Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), 5207–5215.
15. *Рыбкин А. В.* Функция спектрального сдвига для диссипативного и самосопряжённого операторов и формула следов для резонансов. Матем. сб., **125(167):3** (1984), 420–430.
16. *Рыбкин А. В.* Функция спектрального сдвига, характеристическая функция сжатия и обобщённый интеграл. Матем. сб., **185:10** (1994), 91–144.
17. *Сёкефальфи-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.

THE REALITY OF SPECTRAL SHIFT FUNCTIONS FOR CONTRACTIONS AND DISSIPATIVE OPERATORS

M. M. Malamud[a], **H. Neidhardt**[b], **V. V. Peller**[a,c]

[a] *St.Petersburg State University, St.Petersburg, Russia*

[b] *Berlin, Germany*

[c] *St.Petersburg Department Steklov Institute of Mathematics Russian Academy of Sciences, St.Petersburg, Russia*

Presendet by Academician of the RAS S. V. Kislyakov

Recently the authors of this note solved a famous problem that remained open during many years and proved that for arbitrary contractions on Hilbert space with trace class difference there exists an integrable spectral shift function, for which an analogue of the Lifshits—Krein trace formula holds. Similar results were also obtained for pairs of dissipative operators. It turns out that in contrast with the case of self-adjoint or unitary operators, it can happen that there is no real-valued integrable spectral shift function. In this note we state results that give sufficient conditions for the existence of a real-valued integrable spectral shift function for pairs of contractions and pairs of dissipative operators.