ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 517, с. 33–37

МАТЕМАТИКА

УДК 517.957

МАТРИЦА ВАНДЕРМОНДА В КОММУТАТИВНОМ СЛУЧАЕ

 А. И. Перов[1, *], И. Д. Коструб[1, **]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 24.12.2023 г.
После доработки 04.05.2024 г.
Принято к публикации 12.05.2024 г.

В комплексной банаховой алгебре при условии разделенности и спектральной разделенности сформулированы и доказаны условия обратимости матрицы Вандермонда. Приводятся необходимые и достаточные признаки обратимости матрицы Вандермонда. Формулируются аналоги теоремы Сильвестра.

Ключевые слова: коммутативная банахова алгебра, матрица Вандермонда, теорема Сильвестра, теорема об отображении спектров

DOI: 10.31857/S2686954324030057, **EDN:** YBLKBC

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении алгебраических и дифференциальных уравнений в произвольных банаховых алгебрах естественно возникают матрицы Вандермонда, составленные из корней рассматриваемого алгебраического (характеристического) уравнения обратимость которых влечет за собой многие важные свойства упомянутых уравнений.

2. БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО Γ^n И БАНАХОВА АЛГЕБРА $\Gamma^{n\times n}$

Пусть Γ — коммутативная комплексная банахова алгебра [1], [2], которую мы иногда будем называть *гельфандовой* в честь ученого, внесшего решающий вклад в теорию таких алгебр. Пусть n — фиксированное натуральное число.

Обозначим через Γ^n банахово пространство, являющееся прямым произведением (прямой суммой) $\Gamma^n = \Gamma \times \ldots \times \Gamma$ (n раз) и состоящее из столбцов $\mathbf{X}$ с компонентами $x_1, \ldots, x_n$ из Γ. Алгебраические операции сложения и умножения на комплексные числа, а также на элементы алгебры Γ, определим покомпонентно. Норму в Γ^n введем по правилу $\| \mathbf{X} \| = \max\{\| x_j \|, 1 \le j \le n\}$.

Обозначим через $\Gamma^{n\times n}$ — алгебру $n \times n$-матриц $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{jk})$, где $\mathbf{a}_{jk}$ из Γ, $1 \le j \le n$. Алгебраические операции сложения и умножения на комплексные числа, а также на элементы алгебры Γ, определим покомпонентно. Каждая матрица $\mathbf{A}$ определяет линейный ограниченный оператор в $\Gamma^{n\times n}$. $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$, обозначается той же буквой и действует по правилу $\mathbf{y}_j = \mathbf{a}_{j1}x_1 + \ldots + \mathbf{a}_{jn}x_n$ при $1 \le j \le n$. Произведение $\mathbf{AB}$ матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ из $\Gamma^{n\times n}$ определим как произведение линейных операторов в Γ^n. Норма матрицы вводится как операторная $\|\mathbf{A}\| = \sup\{\|\mathbf{AX}\|, \mathbf{X} \in \Gamma^n, \|\mathbf{X}\| \le 1\}$.

3. ОБРАТИМОСТЬ

Напомним, что матрица $\mathbf{A}$ из $\Gamma^{n\times n}$ называется *обратимой,* если существует такая матрица B из $\Gamma^{n\times n}$, для которой

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E} \tag{1}$$

и

$$\mathbf{BA} = \mathbf{E}, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}$ есть единичная матрица в $\Gamma^{n\times n}$. Если это условие выполнено, то матрица $\mathbf{B}$ определяется единственным образом и обозначается $\mathbf{A}^{-1}$.

В рассматриваемом случае каждой матрице $\mathbf{A}$ из $\Gamma^{n\times n}$ может быть сопоставлен ее *детерминант* — алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы со своими знаками. Каждый член определителя

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
*E-mail: anperov@mail.ru
**E-mail: ikostrub@yandex.ru

снабдим знаком плюс или минус, в зависимости от четности или нечетности перестановки вторых индексов. Это можно сделать с помощью множителя $(-1)^{\pi(\sigma)}$, который равен 1, если перестановка σ четная и тогда число инверсий $\pi(\sigma)$ есть четное число и равен – 1, если перестановка σ нечетная и тогда число инверсий $\pi(\sigma)$ есть нечетное число.

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma} (-1)^{\pi(\sigma)} \mathbf{a}_{1j_1} \mathbf{a}_{2j_2} \ldots \mathbf{a}_{nj_n}, \tag{3}$$

где суммирование распространяется на все перестановки σ из n элементов. Для нас важно, что матрица $\mathbf{A}$ обратима тогда и только тогда, когда обратим ее детерминант. При этом

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \left(\det \mathbf{A}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если выполнено условие (1) или (2), то матрица* $\mathbf{A}$ *обратима.*

Доказательство теоремы 1. Так как для произведения матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ из $\Gamma^{n\times n}$ имеем

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

То из (1) вытекает

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = 1,$$

где 1 – это единичный элемент алгебры Γ. В коммутативной алгебре из обратимости произведения вытекает обратимость его сомножителей. Поэтому $\det \mathbf{A}$ и $\det \mathbf{B}$ обратимы. Поэтому матрица $\mathbf{A}$ обратима.

Аналогичные рассуждения проводятся, если выполнено условие (2). Теорема доказана.

4. МАТРИЦА ВАНДЕРМОНДА

Рассмотрим набор, состоящий из n элементов алгебры Γ

$$\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n. \tag{5}$$

Поставим ему в соответствие матрицу $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_{jk})$ из $\Gamma^{n\times n}$, где $\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{z}_k^{j-1}$, при $1 \le j,k \le n$, которую естественно назвать *матрицей Вандермонда* порядка n. В развернутой записи она выглядит следующим образом

$$\mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \ldots & \mathbf{z}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{z}_1^{n-1} & \mathbf{z}_2^{n-1} & \ldots & \mathbf{z}_n^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Для нас важно знать, когда матрица Вандермонда обратима, т. е. существует такая матрица W из $\Gamma^{n\times n}$, для которой

$$\mathbf{VW} = \mathbf{E} \tag{7}$$

и

$$\mathbf{WV} = \mathbf{E}. \tag{8}$$

Согласно теореме 1, достаточно проверить одно из них.

Будем говорить, что система (5) лежит *в общем положении*, если матрица Вандермонда (6) обратима.

Отметим полезную формулу

$$\det \mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = \prod_{n \ge j > k \ge 1} (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k). \tag{9}$$

Для обратимости матрицы Вандермонда $\mathbf{V}$ необходимо и достаточно, чтобы $\det \mathbf{V}$ был обратим.

5. ПЕРВЫЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема 2. *Матрица Вандермонда* $\mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ *обратима тогда и только тогда, когда выполнено условие разделенности: существует обратная*

$$(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k)^{-1} \quad \text{при} \quad j \ne k \ \ (1 \le j,k \le n). \tag{10}$$

Доказательство теоремы 2. Доказательство основано на формуле

$$\det V^{-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = \prod_{n \ge j > k \ge 1} (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k)^{-1}. \tag{11}$$

Теорема доказана. □

Теорема 3 (*достаточное условие обратимости*). *Если выполнено условие спектральной разделенности*

$$S(\mathbf{z}_j) \cap S(\mathbf{z}_k) = \varnothing \quad \text{при} \quad j \ne k \ \ (1 \le j,\ k \le n), \tag{12}$$

то матрица Вандермонда $\mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ обратима.

Доказательство теоремы 3. Так как в коммутативном случае $S(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \subseteq S(\mathbf{a}) - S(\mathbf{b})$, то из $S(\mathbf{a}) \cap S(\mathbf{b}) = \varnothing$ вытекает обратимость разности $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Поэтому теорема 3 вытекает из теоремы 2. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Если матрица Вандермонда* $\mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ *обратима, то все элементы* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ *последнего столбца обратной матрицы* $\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ *обратимы, более определенно*

$$\mathbf{c}_j = (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_1)^{-1}...(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{j-1})^{-1} \times \\ \times(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{j+1})^{-1}...(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_n)^{-1} \tag{13}$$

при $1 < j < n$, *аналогично при* $j = 1$ *и* $j = n$.

Доказательство теоремы 4. Доказательство основано на формуле вычисления обратной матрицы через алгебраические дополнения, при этом соответствующее дополнение для j-го элемента последнего столбца обратной матрицы — определитель Вандермонда порядка $n-1$ с параметрами $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_{j-1}, \mathbf{z}_{j+1}, ..., \mathbf{z}_n$. □

6. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Следующая группа теорем относится к алгебраическому уравнению. Рассмотрим *алгебраическое уравнение* n-й степени, имеющее следующий вид (приведенное уравнение)

$$\mathbf{x}^n + \mathbf{p}_1\mathbf{x}^{n-1} + ... + \mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x} + \mathbf{p}_n = \mathbf{0}. \tag{14}$$

С ним тесно связаны пучок и сопровождающая матрица Фробениуса, которая будет определена в следующем разделе. *Пучок* имеет следующий вид

$$\mathbf{l}_n(\lambda) = \lambda^n + \mathbf{p}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{p}_{n-1}\lambda + \mathbf{p}_n : \mathbb{C} \to \Gamma, \tag{15}$$

т. е. является многочленом от некоторого λ степени n с коэффициентами из рассматриваемой алгебры, коэффициенты уравнения $\mathbf{p}_1,...,\mathbf{p}_n$ принадлежат алгебре Γ.

Мы записываем скалярные величины (комплексные числа) обычным шрифтом, а величины, связанные с алгеброй Γ, — полужирным шрифтом. Выражение $\lambda\mathbf{1}$, где λ — комплексное число, а $\mathbf{1}$ — единица рассматриваемой алгебры, следуя Т. Като [3], записываем в виде λ.

Те λ из $\mathbb{C}$, для которых $l_n(\lambda)$ не имеет обратного, образуют, по определению, *спектр S пучка*. Это есть непустое ограниченное замкнутое множество. Те λ из $\mathbb{C}$, для которых $l_n(\lambda)$ обратим, образуют, по определению, *резольвентное множество R пучка*. Это непустое неограниченное открытое множество. Возникающая при этом функция

$$\mathbf{r}_n(\lambda) \equiv \left(\lambda^n + \mathbf{p}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{p}_n\right)^{-1} : R \to \Gamma \tag{16}$$

называется *резольвентой n-го порядка* [4].

7. ТЕОРЕМА СИЛЬВЕСТРА

Теорема 5. *Пусть $\mathbf{z}$ — корень алгебраического уравнения (14). Тогда справедливо включение*

$$S(\mathbf{z}) \subseteq S. \tag{17}$$

Доказательство теоремы 5. Пусть λ из R. Тогда обратима разность

$$\lambda^n + \mathbf{p}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{p}_n - (\mathbf{z}^n + \mathbf{p}_1\mathbf{z}^{n-1} + ... + \mathbf{p}_n) = \\ = \lambda^n - \mathbf{z}^n + \mathbf{p}_1(\lambda^{n-1} - \mathbf{z}^{n-1}) + ... + \mathbf{p}_{n-1}(\lambda - \mathbf{z}) = \\ = \left(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\mathbf{z} + ... + \lambda\mathbf{z}^{n-2} + \mathbf{z}^{n-1} + ... + \mathbf{p}_{n-1}\right)(\lambda - \mathbf{z}).$$

При этом мы воспользовались формулой

$$\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{y}^{k+1} = \\ = \left(\mathbf{x}^k + \mathbf{x}^{k-1}\mathbf{y} + ... + \mathbf{x}\mathbf{y}^{k-1} + \mathbf{y}^k\right)(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{18}$$

Произведение $\left(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\mathbf{z} + ... + \lambda\mathbf{z}^{n-2} + \mathbf{z}^{n-1} + \right.$ $\left. + ... + \mathbf{p}_{n-1}\right)(\lambda - \mathbf{z})$ обратимо. Поэтому обратима разность $\lambda - \mathbf{z}$. Это означает, что

$$R \subseteq R(\mathbf{z}). \tag{19}$$

Из (19) немедленно вытекает включение (17). Теорема доказана. □

Для матричного уравнения в общем случае эта теорема впервые была доказана Сильвестром. В статье [5] утверждалось, что теорема 5 справедлива без предположения коммутативности соответствующей алгебры. Однако, дальнейший анализ доказательства этой теоремы обнаружил пробел. Некоторое достаточное условие справедливости теоремы Сильвестра в общем случае приведено в статье [6].

8. СОПРОВОЖДАЮЩАЯ МАТРИЦА ФРОБЕНИУСА

Все утверждения данного раздела приводятся без доказательства.

Для алгебраического уравнения (14) матрица Фробениуса имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\mathbf{p}_n & -\mathbf{p}_{n-1} & \dots & \dots & -\mathbf{p}_1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Теорема 6. *Пусть алгебраическое уравнение (14) имеет n корней*

$$\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n, \tag{21}$$

лежащих в общем положении. Тогда справедлива формула

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\ diag\ \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n\}\mathbf{V}^{-1}, \tag{22}$$

где $\mathbf{V}$ – матрица Вандермонда.

Теорема 7. *В условиях теоремы 6 справедливо равенство*

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} S(\mathbf{z}_j). \tag{23}$$

Последняя формула показывает, что спектром алгебраического уравнения (14) естественно назвать спектр ассоциированного с ним пучка. Тогда спектр алгебраического уравнения равняется теоретико-множественной сумме спектров его корней при условии, что они лежат в общем положении.

Теорема 8. *Матрица A обратима тогда и только тогда, когда обратим коэффициент p_n. При выполнении этого условия, обратная матрица имеет вид*

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \square\mathbf{p}_{n-1} & \square\mathbf{p}_{n-2} & \ldots & \square\mathbf{p}_1 & \square 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $\square = (-\mathbf{p}_k)^{-1}$.

Теорема 9 ([7]). *Матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет теореме Гамильтона-Кэли*

$$\mathbf{A}^n + p_1\mathbf{A}^{n-1} + ... + p_{n-1}\mathbf{A} + p_{n-1}\mathbf{E} = 0.$$

Теорема 10 ([7]). *Для резольвенты матрицы A справедлива формула*

$$\begin{gathered}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \left(\lambda^n + \mathbf{p}_1\lambda^{n-1} + \right. \\ \left. +... + \mathbf{p}_n\right)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_k\lambda^k\ (\lambda \in R(\mathbf{A}) = R),\end{gathered} \tag{25}$$

$$\mathbf{A}_k = \sum_{j=0}^{n-1-k} p_{n-1-k-j}\mathbf{A}^j,\ 0 \le k \le n-1. \tag{26}$$

9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕЛЬФАНДА

Пусть $\mathbf{M}$ – множество всех ненулевых комплексных гомоморфизмов алгебры Γ [2]. Последнее означает, что для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из Γ, λ из $\mathbb{C}$, а $\mathbf{m}$ из $\mathbf{M}$

$$\begin{gathered}\mathbf{m}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{m}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{m}(\lambda x) = \lambda\mathbf{m}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{m}(\mathbf{xy}) = \mathbf{m}(x)\mathbf{m}(y), \qquad \|\mathbf{m}\| = 1.\end{gathered} \tag{27}$$

Отметим, что $\mathbf{M}$ компактное хаусдорфово топологическое пространство. Преобразование Гельфанда имеет вид

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{m}), \tag{28}$$

где $\mathbf{x}(\mathbf{m})$ – комплексная непрерывная функция, определенная на $\mathbf{M}$, причем

$$\mathbf{x}(\mathbf{M}) = S(\mathbf{x}). \tag{29}$$

10. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим контурный интеграл

$$\square = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda, \tag{30}$$

где $f(\lambda): G \to C$ – (кусочно) аналитическая функция, заданная на открытом множестве G, содержащем весь спектр S пучка, $\mathbf{r}_n(\lambda) \equiv \left(\lambda^n + \mathbf{p}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{p}_n\right)^{-1}$ есть резольвента n-го порядка, а контур $\partial\sigma$ лежит в пересечении $G \cap R$ и окружает спектр S.

Пусть $\Gamma(G)$ – совокупность всех тех x из Γ, спектр $S(x)$ которых содержится в G. Это множество непусто и открыто. Положим

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\tau} f(\lambda)(\lambda - \mathbf{x})^{-1}d\lambda, \tag{31}$$

где контур $\partial\tau$ лежит в пересечении $G \cap R(\mathbf{x})$ и окружает $S(\mathbf{x})$.

Рассмотрим алгебраическое уравнение n-й степени (14) и предположим, что оно имеет n корней $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n$, лежащих в общем положении. Обозначим через $\mathbf{c}_j$ элементы последнего столбца матрицы $\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n)$, $1 \le j \le n$.

При сделанных выше предположениях имеет место формула [8]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)(\lambda^n + \mathbf{p}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{p}_n)^{-1}d\lambda = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{z}_j)\mathbf{c}_j. \tag{32}$$

11. ТЕОРЕМА ДАНФОРДА

При $n = 1$, положим $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}$ по тереме отображения спектров можно написать

$$S[f(\mathbf{z})] = f[S(\mathbf{z})] \tag{33}$$

(см. формулу (31)).

Теорема 11. *Имеет место включение*

$$S(\Box) \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\lambda_j)}{\prod_{k \neq j}(\lambda_j - \lambda_k)} : \lambda_j \in S(\mathbf{z}_j),\ 1 \leq j \leq n \right\}. \quad (34)$$

При этом дополнительно предполагается, что выполнено условие спектральной разделенности (12).

Доказательство теоремы 11. Пусть m из $\mathbf{M}$. Тогда по формуле (32)

$$\mathbf{m}\sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{z}_j)\mathbf{c}_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}[f(\mathbf{z}_j)\mathbf{c}_j] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}[f(\mathbf{z}_j)]\mathbf{m}\mathbf{c}_j. \quad (35)$$

По формуле (31)

$$\mathbf{m}[f(\mathbf{z})] = \mathbf{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)(\lambda - \mathbf{z})^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)\mathbf{m}(\lambda - \mathbf{z})^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\sigma} f(\lambda)(\lambda - \mathbf{m}\mathbf{z})^{-1}d\lambda = f(\mathbf{m}\mathbf{z}). \quad (36)$$

Согласно формуле (13)

$$\mathbf{m}\mathbf{c}_j = \mathbf{m}\prod_{k \neq j}\left(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k\right)^{-1} = \prod_{k \neq j}\mathbf{m}\left(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k\right)^{-1} = \prod_{k \neq j}\left(\mathbf{m}\mathbf{z}_j - \mathbf{m}\mathbf{z}_k\right)^{-1}. \quad (37)$$

Мы воспользовались тем, что если элемент обратим, то

$$\mathbf{m}\mathbf{x}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{m}\mathbf{x}}. \quad (38)$$

Из (35)–(37), полагая $\lambda_j = \mathbf{m}\mathbf{z}_j,\ 1 \leq j \leq n$, получаем

$$\mathbf{m}S = \sum_{j=1}^{n} f[\mathbf{m}\mathbf{z}_j]\prod_{k \neq j}\left(\mathbf{m}\mathbf{z}_j - \mathbf{m}\mathbf{z}_k\right)^{-1} = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)\prod_{k \neq j}\left(\lambda_j - \lambda_k\right)^{-1}. \quad (39)$$

Мы видим, что $\lambda_j \in S(\mathbf{z}_j),\ 1 \leq j \leq n$ и включение (34) установлено. Теорема доказана. □

12. ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Разделенной разностью порядка $n-1$ функции $f(\mathbf{x})$ отвечающей системе узлов $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$ лежащей в общем положении называется выражение (слева обозначение) [9]

$$\Delta^{n-1}f(\mathbf{x})(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{z}_j)\prod_{k \neq j}\left(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k\right)^{-1}.$$

Формулу (32) при этом можно трактовать как интегральное представление разделенной разности $\Delta^{n-1}f(\mathbf{x})(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$, где $f(\mathbf{x})$ вычисляется по формуле (31). В принятых обозначениях теорема 12 выглядит следующим образом

$$S(\Delta^{n-1}f(\mathbf{x})(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)) \subseteq \subseteq \left\{\Delta^{n-1}f(\lambda)(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) : \lambda_j \in S(\mathbf{z}_j),\ 1 \leq j \leq n\right\}. \quad (40)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
2. *Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматлит, 2011.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. *Курбатов В.Г., Курбатова И.В.* Вычислительные методы спектральной теории. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019.
5. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 491. С. 73–77.
6. *Крейн М.Г., Лангер Г.К.* О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой алгебрах // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. № 1. С. 39–42.
7. *Коструб И.Д.* Теорема Гамильтона–Кэли и представление резольвенты // Функц. анализ и его прил. 2023. Т. 57. Вып. 4. С. 130–132.
8. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
9. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.

THE VANDERMONDE MATRIX IN THE COMMUTATIVE CASE

A. I. Perov[a], I. D. Kostrub[a]

[a]*Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V. V. Kozlov

In complex Banach algebra, under the condition of separateness and spectral separateness, the conditions for the reversibility of the Vandermonde matrix are formulated and proved. The necessary and sufficient signs of reversibility of the Vandermonde matrix are given. Analogs of Sylvester's theorem are formulated.

Keywords: commutative Banach algebra, Vandermonde matrix, Sylvester's theorem, spectrum mapping theorem