ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 516, с. 65–74

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2024 г. М. В. Шамолин[1, *]

Представлено академиком В.В. Козловым

Поступило 01.04.2024 г.
После доработки 31.04.2024 г.
Принято к публикации 27.05.2024 г.

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к трехмерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: инвариант динамической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость

DOI: 10.31857/S2686954324020105, **EDN:** XIRKPA

ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как известно [21–23], облегчает их исследование, а иногда позволяет и точно их проинтегрировать. Так наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт вполне естествен — когда фазовый поток сохраняет объем с постоянной плотностью. Но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, коэффициенты имеющихся инвариантов должны, вообще говоря, включать функции с существенно особыми точками (см. также [24–26]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m нужно знать $m-1$ независимый тензорный инвариант (первый интеграл, дифференциальная форма, векторное поле и т.д.). При этом для достижения точной интегрируемости, как правило, приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Для систем классической механики понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ “в целом” начинается с исследования приведенных уравнений геодезических на поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, вводя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” —

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

[*] *E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru*

это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметит также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела (см. также [25]).

В работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых может быть выделена система с тремя степенями свободы на своем шестимерном многообразии. Имеющееся в системе силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМ МАЛОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере систем третьего и пятого порядка. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α: $\dot v = a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \dot z = d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, v\dot\alpha = g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2.$

Выбирая новые независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = <'>$, $v \neq 0$), а также фазовую Z, $z = Zv$, перепишем систему как

$$\begin{gathered} v' = v\Psi(\alpha, Z), \\ \Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{gathered} \tag{2}$$

при этом уравнение (1) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (2) с одной степенью свободы на двумерном фазовом многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$.

Стоит выделить случай усеченной системы, когда выполнены тождества $d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0$. Тогда система (1), (2) имеет аналитический первый интеграл $\Phi_1(v;Z) = vZ = \mathrm{const}$. Для ее интегрируемости достаточно найти еще один первый интеграл, независимый с Φ_1. Мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (1), (2):

$$\begin{gathered} v' = v\Psi(\alpha, Z), \\ \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde\Delta(\alpha) f_1(\alpha), \\ \tilde\Delta(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \\ \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_1(\alpha)}, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = f_1(\alpha)Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha) f_1(\alpha), \\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \end{gathered} \tag{4}$$

$b_0 \geq 0$ — параметр, $f_1(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ — некоторые гладкие функции, и будем рассматривать (3), (4) как систему при отсутствии внешнего поля сил.

Система (3), (4) имеет дополнительный первый интеграл: $\Phi_0(v;Z;\alpha) = v^2\big(1 + 2b_0 Z\Delta(\alpha)\big) = C_0 = \mathrm{const}.$ Другими словами, независимая подсистема (4) на многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный [27, 28] по Z (автономный) первый интеграл вида $\Phi(Z;\alpha) = (1 + 2b_0 Z\Delta(\alpha))/Z^2 = C = \mathrm{const}$, который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, у подсистемы (4) нет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака. Таким образом, внутреннее гладкое силовое поле (зависящее от параметра $b_0 > 0$) в системе (3), (4) не нарушает консервативности системы.

Зададимся вопросом поиска инвариантных дифференциальных форм для системы (3), (4).

Для поиска функции $\rho(v;\alpha,Z)$, которая определяет искомую форму $\rho(v;\alpha,Z)dv\wedge d\alpha\wedge dZ$, проинтегрировано линейное уравнение $\mathrm{div}[\rho(v;\alpha,Z)W_0(v;\alpha,Z)]=0$ ($W_0(v;\alpha,Z)$ — векторное поле системы). При этом, в частности, функции $\rho_1(Z)=1/Z^3, \rho_2(v)=v^3$ определяют искомую форму.

Система (3), (4) в зависимости от целей подвергнута различным модификациям [26], приведем одну из них. Она на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^1\{Z;\alpha\}$ имеет два ключевых параметра $b_0\geq 0$, $b_1\neq 0$, и в ней введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования:

$$\begin{gathered} v' = v\Psi(\alpha,Z),\\ \Psi(\alpha,Z) = -b_0 Z^2\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = Z + b_0 Z^2\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha),\\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha,Z),\\ \overline{f}(\alpha) = \frac{\mu-\Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}, \end{gathered} \tag{6}$$

$\mu>0$. Коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b_0, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Теорема 1. *Если выполнено условие* $F(\alpha)=\lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, *то система* (5), (6) *обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она обладает двумя инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.*

Одним из возможных видов инвариантной дифференциальной формы объема для системы (5), (6) является следующий:

$$\begin{gathered} \rho(v;\alpha,Z)dv\wedge d\alpha\wedge dZ = \\ = v^3\exp\left\{-b_1\lambda\mu\int\frac{du}{\lambda-b_1\lambda\mu u-u^2}\right\}dv\wedge d\alpha\wedge dZ,\\ u=\frac{Z}{\Delta(\alpha)}. \end{gathered}$$

Мы видим, что задача точной интегрируемости класса однородных систем третьего порядка с диссипацией путем нахождения необходимого количества инвариантов, несмотря на малый порядок системы, достаточно нетривиальна.

Аналогичный спектр вопросов качественного характера был рассмотрен и для однородных по части переменных систем пятого порядка, также обладающих диссипацией [26]. После введения силовых полей рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^2\{Z_2,Z_1;\alpha,\beta\}$ гладкого многообразия $M^2\{\alpha,\beta\}$ такова:

$$\begin{gathered} \upsilon' = v\Psi(\alpha,Z),\\ \Psi(\alpha,Z) = -b\left(Z_1^2+Z_2^2\right)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = Z_2 + b\left(Z_1^2+Z_2^2\right)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha),\\ \overline{f}(\alpha) = \frac{\mu-\Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)},\\ Z_2' = F(\alpha) - \left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]\times\\ \times Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha,Z),\\ Z_1' = -\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha,Z),\\ \beta' = Z_1\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \end{gathered}$$

здесь $\mu>0$ — параметр, $DQ(q)=d\ln|Q(q)|/dq$, $b\geq 0$, $\Delta(\alpha)$, $F(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$, $i,j,k=\alpha,\beta$, — некоторые гладкие функции. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

СИСТЕМЫ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Пусть v, α, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, $z=(z_1,z_2,z_3)$ — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β. Выбирая новую независимую переменную q ($dq=vdt$, $d/dq=\langle'\rangle$, $v\neq 0$), а также новые фазовые Z_k, $z_k=Z_kv$, $k=1,2,3$, $Z=(Z_1,Z_2,Z_3)$, будем рассматривать систему седьмого порядка

$$\begin{gathered} v' = v\Psi(\alpha,Z),\\ \Psi(\alpha,Z) = -b\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2\right)\tilde{\Delta}(\alpha)f_3(\alpha),\\ \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha},\\ \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\alpha' = f_3(\alpha)Z_3 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\Delta(\alpha) f_3(\alpha),$$
$$Z_3' = -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right]Z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \times$$
$$\times \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)Z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha,Z),$$
$$Z_2' = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_2Z_3 -$$
$$- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha,Z), \qquad (9)$$
$$Z_1' = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]Z_1Z_3 -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg(\beta_1)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha,Z),$$
$$\beta_1' = Z_2 f_1(\alpha),$$
$$\beta_2' = Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1),$$

$DQ(q) = d\ln|Q(q)|/dq$, $b \ge 0$, $\Delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$, $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$, $i,j,k = \alpha,\beta$, — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (8) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (9) в качестве независимой системы (с тремя степенями свободы) на шестимерном многообразии $N^6\{Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\} = TM^3\{Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ (касательном расслоении гладкого трехмерного многообразия $M^3\{\alpha,\beta_1,\beta_2\}$, см. также [27]). Рассмотрим структуру системы (9). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий с семью ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ многообразия $M^3\{\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ (в частности, на расслоении (трехмерной) поверхности вращения, пространства Лобачевского и т.д.):

$$\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,$$
$$\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \qquad (10)$$
$$\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0.$$

Действительно, выбрав новые координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве в виде

$$\dot\alpha = z_3 f_3(\alpha),$$
$$\dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \qquad (11)$$
$$\dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1),$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (9)):

$$Z_1' = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]Z_1Z_3 -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg(\beta_1)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha,Z),$$
$$Z_2' = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_2Z_3 -$$
$$- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha,Z), \qquad (12)$$
$$Z_3' = -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right]Z_3^2 -$$
$$- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)Z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1) \times$$
$$\times \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha,Z),$$

при этом уравнения (10) почти всюду эквивалентны совокупности (11), (12), которая, прежде всего, присутствует в системе (9) (при этом вместо (11) лучше выбрать равенства $\alpha' = Z_3 f_3(\alpha)$, $\beta_{1'} = Z_2 f_1(\alpha)$, $\beta_{2'} = Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1)$).

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (10). (a) Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного (четырехмерного) твердого тела (см. также [29–31]). (b) Системы на касательном расслоении более общей трехмерной поверхности вращения. (c) Системы на касательном расслоении пространства Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (8), (9) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \ge 0$. Но, как и в системе (3), (4), они не нарушают консервативности, поскольку система (8), (9) обладает полным набором (пятью) гладких первых интегралов.

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении трехмерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ штук при $n = 3$, т.е. 18 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ из (11)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся “лишь” 7 ($n(n-1)+1$ штукой при $n=3$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (10). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет 4 ($n(n-1)/2+1$ штука при $n=3$). Таким образом, мы имеем 11 функции, характеризующие исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ($B(3)$) на имеющиеся $A(3)=11$ функций ($A(n)=3n(n-1)/2+2$ штуки при $n=3$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. В данной работе будем накладывать $B(3)=8$ условий на имеющиеся $A(3)=11$ функций.

Число $B(3)$ складывается из трех слагаемых: $B(3)=B_1(3)+B_2(3)+B_3(3)$. Число $B_1(3)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$, а именно,

$$f_1(\alpha)\equiv f_2(\alpha)=:f(\alpha), \tag{13}$$

т.е. $B_1(3)=1$ (в общем случае $B_1(n)=(n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(3)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_1(\alpha),\\ \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_2(\beta_1),\end{gathered} \tag{14}$$

т.е. $B_2(3)=3$ (в общем случае $B_2(n)=n(n-1)/2$). Число $B_3(3)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{gathered}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)\equiv\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1)=:\Gamma_3(\alpha),\\ \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha)+Df_3(\alpha)\equiv 0,\\ f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\right]+f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\equiv\\ \equiv 0, 2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)+g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)\equiv 0,\end{gathered} \tag{15}$$

т.е. $B_3(3)=4$ (в общем случае $B_3(n)=n(n-1)/2+1$).

Условия (15) опираются на (13), (14), благодаря чему количество аргументов в некоторых функциях уменьшается.

Видно, что в общем случае $B(n)=B_1(n)+B_2(n)+B_3(n)=(n-1)^2+n(n-1)/2+1$, при этом $A(n)-B(n)=n$, что говорит об увеличении количества “произвольных” функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n (n — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае $A(3)-B(3)=3$.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (8), (9) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [25, 26, 27]). И то, что полный набор состоит из пяти, а не из шести, тензорных инвариантов (помимо тривиального — векторного поля самой системы [23]), показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (10), переписанных в виде $\ddot{x}^i+\sum_{j,k=1}^3\Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k=0, i=1,2,3$, является гладкая функция $\Phi(\dot{x};x)=\sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k$, но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым “выпрямив” квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2 (справедливой и при более общих условиях) накладываются 8 алгебраических и дифференциальных соотношений (13)—(15) на 11 функций: на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ и на 7, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (13)—(15)*, то система* (8), (9)*, рассмотренная на произведении* $\mathbf{R}^1_+\{v\}\times TM^3\{Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$*, обладает полным набором, состоящим из пяти гладких первых интегралов вида*

$$\Phi_0(v;Z_2;\alpha)=v^2\left(1+2bZ_3\Delta(\alpha)\right)=C_0=\mathrm{const};$$

$$\Phi_1(v;Z_3,Z_2,Z_1)=v^2\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2\right)=C_1^2=\mathrm{const}; \tag{16}$$

$$\Phi_2(v;Z_2,Z_1;\alpha)=v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\,\Delta(\alpha)=C_2=\mathrm{const}; \tag{17}$$

$$\Phi_3(v;Z_1;\alpha,\beta_1)=v^2Z_1\Delta(\alpha)\Psi(\beta_1)=C_3=\mathrm{const},$$

$$\begin{gathered}\Delta(\alpha)=A_1f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\},\\ A_1=\mathrm{const},\\ \Psi(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\};\end{gathered} \tag{18}$$

$$\Phi_4(\beta_1,\beta_2) = \beta_2 - \int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Psi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}. \quad (19)$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$ и фазовых

$$w_3 = Z_3, w_2^* = \ln|w_2|,$$
$$w_2 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2},$$
$$w_1^* = \ln\left|w_1 + \sqrt{1 + w_1^2}\right|, \quad (20)$$
$$w_1 = \frac{Z_2}{Z_1}$$

— фазовый поток системы (8), (9) сохраняет фазовый объем с плотностью $\rho(v) = v^3$ на произведении $\mathbf{R}_+^1\{v\} \times TM^3\{w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма $v^3 dv \wedge dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2$.

Заметим также, что равенство (15) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (16). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [29, 30]). Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ С ДИССИПАЦИЕЙ ЧЕРЕЗ УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Модифицируем систему (8), (9) при наличии двух ключевых параметров $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, вводя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)f_3(\alpha)$ в уравнение на $Z_{3'}$ системы (21), (22) и даже положив при этом $b_1 = 0$, полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),$$
$$\Psi(\alpha, Z) = -b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (21)$$

$$\alpha' = Z_3 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha),$$
$$\overline{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)},$$
$$Z_3' = F(\alpha) - \left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right]Z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \times$$
$$\times \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)Z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),$$
$$Z_2' = -\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_2 Z_3 - \quad (22)$$
$$-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),$$
$$Z_1' = -\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]Z_1 Z_3 -$$
$$-\frac{f_1(\alpha)}{f_3(\alpha)}\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg(\beta_1)\right]Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$
$$\beta_1' = Z_2 \frac{f_1(\alpha)}{f_3(\alpha)},$$
$$\beta_2' = Z_1 \frac{f_2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g(\beta_1),$$

здесь $\mu > 0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α', а во второй строке — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix},$$
$$U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \overline{f}(\alpha) \\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где U — преобразование с определителем, равным μ, и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\Delta(\alpha) = \cos\alpha$ или $\Delta(\alpha) = \sin\alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α. Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [25–27]).

ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдем теперь к интегрированию системы седьмого порядка (21), (22) при выполнении свойств (13)–(15), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы пятого порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (21), (22) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 8 алгебраических и дифференциальных соотношений (13)–(15) на 11 функций: на 4 функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ и на 7, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Тогда после замены фазовых переменных (20) система (21), (22) распадается следующим образом:

$$\begin{gathered} v' = v\Psi_0(\alpha,w), \\ \Psi_0(\alpha,w) = -b\left(w_2^2 + w_3^2\right)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = w_3 + b\left(w_2^2 + w_3^2\right)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha), \\ w_3' = F(\alpha) - \Gamma_3(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}w_2^2 - w_3\Psi_0(\alpha,w), \\ w_2' = \Gamma_3(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}w_2 w_3 - w_2\Psi_0(\alpha,w), \end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} w_1' = \pm w_2\sqrt{1+w_1^2}\,\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right], \\ \beta_1' = \pm\frac{w_1 w_2}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\beta_2' = \pm\frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}g(\beta_1). \tag{27}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (24)–(27) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (25), один – для системы (26) (после соответствующей замены независимого переменного в ней) и два дополнительных тензорных инварианта, “привязывающих” уравнения (24) и (27) (т.е. всего пять).

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln\left|\Delta(\alpha)\right| = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \tag{28}$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ – равенство

$$F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \tag{29}$$

Условие (28) назовем “геометрическим”, а условие (29) – “энергетическим”. Условие (28) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функций $f(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, входящих в кинематические соотношения. Условие (29) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к “силовой” функции $\Delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [32–34]).

Теорема 3. *Пусть для некоторых* $\kappa,\lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются условия* (28) *и* (29). *Тогда система* (24)–(27) *обладает полным набором – пятью (одним гладким и четырьмя, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает пятью инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.*

Действительно, благодаря однородным переменным u_1, u_2, $w_2 = u_1\Delta(\alpha)$, $w_3 = u_2\Delta(\alpha)$, из системы (25) можно получить следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{gathered} \Delta\frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{u_2 + b\left(u_1^2 + u_2^2\right)\Delta^2 + b_1\lambda\left(\mu - \Delta^2\right)}, \\ \Delta\frac{du_1}{d\Delta} = \frac{(\kappa-1)u_1 u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{u_2 + b\left(u_1^2 + u_2^2\right)\Delta^2 + b_1\lambda\left(\mu - \Delta^2\right)}, \end{gathered} \tag{30}$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2 - \kappa u_1^2}{(\kappa-1)u_1 u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \tag{31}$$

Уравнение (31) имеет вид уравнения Абеля [35–37]. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1\lambda\mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{32}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_3, w_2; \alpha) = G_1\left(\frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_2}{\Delta(\alpha)}\right) = \\ = \frac{w_3^2 + w_2^2 + b_1\lambda\mu w_3\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha)}{w_2\Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{33}$$

Используем для подсчета дивергенции векторного поля $W_2(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$, $w_2^* = \ln|w_2|$, $w_1^* = \ln\left|w_1 + \sqrt{1 + w_1^2}\right|$, системы (24)–(27) с диссипацией функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную для системы (8), (9)). Тогда составная система уравнений характеристик для уравнения

$$\operatorname{div}\left[\rho\left(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\right) W_2\left(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\right)\right] = 0 \tag{34}$$

будет состоять из системы (24)–(27) (правая часть которой умножена на функцию $\rho_2(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1\lambda\mu\tilde{\Delta}(\alpha)\rho. \tag{35}$$

Системе (24)–(27), (35) уравнений характеристик можно сопоставить следующие соотношения: два из (30) и

$$\Delta\frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{u_2 + b\left(u_1^2 + u_2^2\right)\Delta^2 + b_1\lambda\left(\mu - \Delta^2\right)}. \tag{36}$$

В общем случае искомые первые интегралы выписываются громоздко (в частности, если $\kappa = -1$, то используется равенство (32)). При участии уравнений (30) получается дополнительный первый интеграл системы (25), имеющий следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_3, w_2; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_2}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{37}$$

При этом (при $\kappa = -1$) первый интеграл (37) найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu + u_2)\Delta + \left\{b\left[U^2(C_1, u_2) + u_2^2\right] - b_1\lambda\right\}\Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)},$$

$$(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)}\right\}, \\ u(u_2) = \lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2. \tag{38}$$

Выражение первого интеграла (37) через конечную комбинацию элементарных функций главным образом зависит от явного вида функции $\Delta(\alpha)$.

Кроме того, у системы (24)–(27) существует гладкий первый интеграл, который, например, при $b = -b_1$ примет вид

$$\Theta_0(v; w_3, w_2; \alpha) = v^2\begin{pmatrix} 1 + 2bw_3\Delta(\alpha) - \\ - b^2\mu\left(w_2^2 + w_3^2\right)\end{pmatrix} = C_0 = \text{const}. \tag{39}$$

Первый интеграл для независимой (после замены в ней независимого переменного) подсистемы (26) будет иметь вид

$$\Theta_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\Psi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}, \tag{40}$$

о функции $\Psi(\beta_1)$ см. (18). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (27), находится по аналогии с (19):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \mp \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi^2(b) - 1}}db = C_4 = \text{const}. \tag{41}$$

Уравнение (36), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp\left\{b_1\lambda\mu\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} = C_\rho = \text{const},$$
$$U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1U(C_1, u_2).$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$(v; w_3; \alpha)dv \wedge d\alpha \wedge dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$
$$u_2 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \tag{42}$$
$$R(v; w_3; \alpha) = v^3\exp\left\{-b_1\lambda\mu\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\}.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения (34) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = R(v; w_3; \alpha) \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4],$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4]$ — произвольная гладкая функция пяти аргументов, при этом

$\Theta_0,\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3,\Theta_4$ — пять независимых первых интегралов (39), (33), (37), (40), (41) соответственно.

В частности, за четыре функционально независимых решения линейного уравнения (34) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_0(v;w_3,w_2;\alpha) = R(v;w_3;\alpha)\cdot\Theta_0(v;w_3,w_2;\alpha),$$
$$\rho_1(v;w_3,w_2;\alpha) = R(v;w_3;\alpha)\cdot\Theta_1(w_3,w_2;\alpha),$$
$$\rho_2(v;w_3,w_2;\alpha) = R(v;w_3;\alpha)\cdot\Theta_2(w_3,w_2;\alpha),$$
$$\rho_3(v;w_3,w_1;\alpha,\beta_1) = R(v;w_3;\alpha)\cdot\Theta_3(w_1;\beta_1),$$
$$\rho_4(v;w_3;\alpha,\beta_1,\beta_2) = R(v;w_3;\alpha)\cdot\Theta_4(\beta_1,\beta_2).$$

СТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Система (24)–(27) является динамической системой с переменной диссипацией [32–34]. При этом при $F(\alpha)\equiv 0$ она превращается в систему консервативную, эквивалентную (8), (9). Последняя, в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (16), (17) в координатах w. Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (24)–(27) при условии (29) обладает первым интегралом вида

$$\Theta\,|_{B=0}\,(B;v;w_3,w_2;\alpha) = \\ = v^2\left(w_2^2 + w_3^2 - \lambda\Delta^2(\alpha)\right) = \text{const}, \tag{43}$$

где $\Theta(B;v;w_3,w_2;\alpha) = v^2(w_2^2 + w_3^2 + B\lambda\mu w_3\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha))$ — семейство функций, зависящих от параметра $B\geq 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (43), (17) (в координатах w) также является первым интегралом системы (24)–(27) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta\,|_{B=b_1}\,(B;v;w_3,w_2;\alpha) = \\ = v^2\left(w_2^2 + w_3^2 + b_1\lambda\mu w_3\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha)\right) = \text{const} \tag{44}$$

и (17) (в координатах w) по отдельности не является первым интегралом системы (24)–(27). Однако отношение функций (44), (17) (в координатах w) является первым интегралом (33) системы (24)–(27) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [24, 33, 34].

Выделим теперь существенные случаи для функций $f(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, определяющих метрику на трехмерной сфере, и функции $\Delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu\sin^2\alpha}},\quad \nu\in\mathbf{R},\quad f_3(\alpha)\equiv -1,\quad \Delta(\alpha) = \sin\alpha, \tag{45}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu\sin^2\alpha}},\quad \nu\in\mathbf{R},\quad f_3(\alpha)\equiv -1, \tag{46}$$

а также следующий случай, имеющий самостоятельный интерес:

$$f(\alpha) = \frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}},\quad \nu_1,\nu_2\in\mathbf{R},\quad f_3(\alpha) = \nu_1\alpha. \tag{47}$$

Случай (45) формирует класс систем (21), (22) при $\mu = 1$, соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил. В частности, при $\Delta(\alpha)\equiv F(\alpha)\equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трехмерной сфере. В случае (45), если $\Delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение четырехмерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [32]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \Delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна обобщенному сферическому маятнику, находящемуся в неконсервативном поле сил ("помещенному в поток набегающей среды"), и обладает полным набором первых интегралов с существенно особыми точками, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Случай (46) формирует класс систем (21), (22), соответствующих движению точки по трехмерной сфере с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства.

Случай (47) формирует класс систем (21), (22), соответствующих движению точки в трехмерном пространстве Лобачевского в модели Клейна.

В двух последних случаях функция $\Delta(\alpha)$ пробегает некоторое функциональное множество.

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В данной же работе предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем седьмого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Показана связь наличия предъявляемых инвариантных форм с набором первых интегралов. Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде (см. также [38, 39, 40]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. Paris: Gauthier–Villars, 1912.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.
6. *Шамолин М.В.* Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514. № 1. С. 98–106.
7. *Шамолин М.В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 1. С. 86–92.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
12. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 4. С. 3–229.
13. *Шамолин М.В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
14. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.
15. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
16. *Polyanin A.D. & Zaitsev V.F.* (2017). Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9781315117638
17. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
18. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
19. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.
20. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 3. С. 3–237.

INVARIANTS OF SEVENTH-ORDER HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION

M. V. Shamolin[a, *]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

New cases of integrable dynamical systems of the seventh order homogeneous in terms of variables are presented, in which a system on a tangent bundle to a three-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of a different sign. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: invariant of dynamical system, essentially singular points of invariant, system with dissipation, integrability