ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 93–98

МАТЕМАТИКА

УДК 517.4+519.71

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Академик РАН В. А. Садовничий[1,*], Я. Т. Султанаев[2,3,], Н. Ф. Валеев[4,***]**

Поступило 05.06.2023 г.
После доработки 02.09.2023 г.
Принято к публикации 21.09.2023 г.

Рассматривается обратная оптимизационная спектральная задача: для заданного матричного потенциала $Q_0(x)$ требуется найти ближайшую к нему матричную функцию $\hat{Q}(x)$ такую, чтобы k-е собственное значение матричного оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $\hat{Q}(x)$ совпадало с заданным числом λ^*. Основной результат работы заключается в доказательстве теорем существования и единственности. Установлены явные формулы для оптимального потенциала через решения систем нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, известных в математической физике как системы нелинейных уравнений Шрёдингера.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, задача оптимизации, векторный оператор Штурма–Лиувилля, нелинейная система уравнений Шрёдингера

DOI: 10.31857/S2686954323600477, **EDN:** GHJAMX

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $L_n^2(0,1) = L^2(0,1)\times..\times L^2(0,1)$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций со скалярным произведением:

$$(\vec{y},\vec{v}) = \int_0^1\sum_{k=1}^n y_k(x)\overline{v}_k(x)dx,$$

$\mathcal{M}_n^2(0,1)$ – гильбертово пространство всех $n \times n$ матриц с элементами-функциями из $L^2(0,1)$ с нормой

$$\|Q\|^2_{\mathcal{M}_n^2} = \int_0^1 tr\left(Q^*(x)Q(x)\right)dx.$$

В пространстве $L_n^2(0,1)$ рассматривается дифференциальный оператор следующего вида

$$L[Q](\vec{y}) \equiv -\frac{d^2}{dx^2}\vec{y}(x) + Q(x)\vec{y}(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

с областью определения $D(L[Q]) = \{\vec{y} \in L_n^2(0,1) | \vec{y}' \in AC[0,1],\ L[Q]\vec{y} \in L_2(0,1),\ \vec{y}(0) - h\vec{y}'(0) = 0,\ \vec{y}(1) + H\vec{y}'(1) = 0\}$, где $Q(x) \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ – эрмитова матрица, h, H – самосопряженные матрицы.

Поскольку $Q(x)$, h, H – эрмитовы матрицы, то оператор $L[Q]$ самосопряженный. Ниже будет показано, что оператор $L[Q]$ полуограниченный. Спектр оператора $L[Q]$ дискретный и состоит из последовательности собственных значений $\sigma(\mathcal{L}[Q]) := \{\lambda_k(Q)\}_{k=1}^\infty$, определяемых из принципа минимакса

$$\lambda_k(Q) = \sup_{\phi_1,..,\phi_{k-1}} \inf\left\{\frac{(L[Q]\psi,\psi)}{(\psi,\psi)} : (\psi,\phi_j) = 0,\ j = 1,..,k-1\right\}. \quad (2)$$

Собственные значения рассматриваемого оператора являются функционалами от $Q \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ и их можно перенумеровать с учетом их кратности:

$$\lambda_1(Q) \leqslant \lambda_2(Q) \leqslant \ldots\lambda_k(Q) \leqslant \ldots\ldots\lambda_n(Q) \leqslant \ldots.$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[2] *Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия*
[3] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[4] *Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия*
**E-mail: info@rector.msu.ru*
***E-mail: sultanaevyt@gmail.com*
****E-mail: valeevnf@yandex.ru*

Отметим, что собственные значения в общем случае могут иметь кратность p_k, $1 \leqslant p_k \leqslant n$.

Классическая обратная спектральная задача для оператора $L[Q]$ с областью определения $D(L[Q])$ формулируется как нахождение потенциала $Q(x)$ и граничных условий по заданным спектральным данным (см., например, [1–3]), при этом для единственности решения этой задачи знания только одного спектра $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ недостаточно. Также имеется класс задач, в которых по спектральным данным требуется восстановить конечное число неизвестных параметров линейного оператора (см. [4–6]).

В данной работе исследуется так называемая оптимизационная обратная спектральная задача для оператора $L[Q]$. Такая задача относится к обратным спектральным задачам с неполными спектральными данными: в качестве спектральных данных используется только конечное число точек дискретного спектра. Такой взгляд на обратные спектральные задачи, в известном смыле, является естественным. Одной из причин тому является недоступность для измерения полной системы спектральных данных (для задач диагностики или идентификации объектов), а в задачах построения линейной динамической системы с заданными частотно-резонансными свойствами наиболее близкой к "эталонной" системе нет необходимости рассматривать весь диапозон частотно-резонансных характеристик. Эти замечания приводят к исследованию различных содержательных постановок обратных спектральных задач с неполными спектральными данными (см., например, [3–5, 7]).

При этом одних спектральных данных для корректной разрешимости такого типа задач недостаточно. В частности, задача будет иметь бесконечное множество решений $Q(x) \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$. Для корректной постановки можно, исходя из содержательного смысла решаемой задачи, наложить дополнительные условия на граничные условия, на форму собственных функций и т.д.

Мы изучаем обратные спектральные задачи с неполными спектральными данными для дифференциальных операторов, в которых задается конечное число спектральных данных. В данном случае задается фиксированное подмножество из m собственных значений $\lambda_{k_1}(Q) < \ldots < \lambda_{k_m}(Q)$, определяемых соотношением из (2). Кроме того, в качестве дополнительного условия, мы предполагаем, что заранее известна некоторая информация о потенциале Q, а именно, мы ищем потенциал Q наиболее близкой к определенной "форме" $Q_0(x)$.

Применительно к оператору $L[Q]$ исследуется следующая *оптимизационная обратная спектральная задача*.

Пусть дан набор порядковых номеров $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ собственных значений из (2) "эталонный" вещественнозначный потенциал $Q_0(x) \in B$, где B – банахово (функциональное) пространство, и вещественные числа $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \ldots < \lambda_m^*$. Требуется найти вещественнозначную функцию потенциала $\hat{Q} \in B$ такую, что

1. $\lambda_{k_j}(\hat{Q}) = \lambda_j^*,\ j = 1,..,m,$

2. $\hat{Q} = \arg\inf_{Q \in B} \|Q - Q_0\|_B$.

Заметим, что банахово пространство B является неотъемлемой частью постановки оптимизационной обратной спектральной задачи и, как было показано в [8], играет существенную роль. В частности, для различных пространств B будут соответствовать различные формулы для оптимального потенциала $\hat{Q}$.

Интерес к таким постановкам вызван прежде всего прикладными задачами, в которых требуется построить линейную колебательную систему с заданными собственными частотами колебаний и наиболее близкой к некоторой эталонной системе, а также задачами идентификации колебательной системы по измеренной части спектра.

Отдельный интерес представляет связь оптимизационных спектральных задач с нелинейными операторами математической физики (см., например, [8, 9]), с различными экстремальными свойствами собственных значений и собственных функций (см. [1, 2, 10–13] библиографию к ним).

В данной работе мы рассматриваем частный случай сформулированной выше задачи.

($\mathcal{P}^0$) *Пусть заданы* $\lambda^* \in \mathbb{R}$, $Q_0 \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$. *Требуется найти потенциал* $\hat{Q} \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ *такой, что* k*-е собственное значение* $\lambda_k(\hat{Q})$ *оператора* $L[\hat{Q}]$ *совпадает с заданным значением* λ^* *и*

$$\|Q_0 - \hat{Q}\|_{\mathcal{M}_n^2} = \\ = \inf\{\|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2} : \lambda^* = \lambda_k(Q), Q \in \mathcal{M}_n^2\}. \quad (3)$$

Отметим, что в [7] задача ($\mathcal{P}^0$) рассмотрена для первого собственного значения оператора $L[Q]$.

В качестве результата работы мы также покажем, как оптимизационная обратная спектральная задача связана с системой нелинейных уравнений Шрёдингера.

2. Основные утверждения. Сформулируем и приведем краткие доказательства основных утверждений. Доказательства всех утверждений, без ограничения общности, изложены для оператора $L[Q]$ с однородными граничными условиями Дирихле.

Теорема 1. *Пусть заданы $\lambda^* \in \mathbb{R}$, k-порядковый номер собственного значения оператора $L[Q]$ и $Q_0 \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$. Тогда найдется потенциал $\hat{Q} \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ такой, что k-е собственное значение $\lambda_k(\hat{Q})$ оператора $L[\hat{Q}]$ совпадает с заданным значением λ^* и*

$$\|Q_0 - \hat{Q}\|_{L^2} = = \inf\{\|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2} : \lambda^* = \lambda_k(Q), Q \in \mathcal{M}_n^2(0,1)\}. \quad (4)$$

Наметим схему доказательства утверждения. Поскольку собственное значение рассматриваемого оператора $\mathcal{L}[Q]$ может оказаться кратности $p > 1$, нам понадобится одно свойство собственных функций оператора $\mathcal{L}[Q]$, соответствующих кратному собственному значению.

Лемма 1. *Пусть λ^* — собственное значение кратности p, $2 \leqslant p \leqslant n$ и $\vec{v}_1(x),..,\vec{v}_p(x)$ — соответствующие собственные функции самосопряженной краевой задачи*

$$-\frac{d^2}{dx^2}\vec{v} + Q(x)\vec{v} = \lambda^*\vec{v} \quad ,\vec{v}(0) = \vec{v}(1) = 0. \quad (5)$$

Тогда система матриц $\{\vec{v}_k(x) \otimes \vec{v}_j(x)\}_{k=1}^p$ линейно-независима в пространстве $\mathcal{M}_n^2(0,1)$.

Из этого утверждения вытекает, что для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta(x,\epsilon) \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ такая, что:

$$\begin{gathered}\lambda_1(Q + \delta(x,\epsilon)) \leqslant \lambda_2(Q + \delta(x,\epsilon)) \leqslant \ldots \leqslant \\ \leqslant \lambda_{k-1}(Q + \delta(x,\epsilon)) < \lambda_k(Q + \delta(x,\epsilon)) < \\ < \lambda_{k+1}(Q + \delta(x,\epsilon)) \leqslant \ldots\lambda_{k+n}(Q + \delta(x,\epsilon)), \\ \lambda_k(Q + \delta(x,\epsilon)) = \lambda^*.\end{gathered}$$

Пусть теперь $\{Q_j(x)\}_{j=1}^\infty$, $Q_j \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$-минимизатор функционала расстояния $\|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2}$. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что элементы последовательности удовлетворяют условию:

$$\begin{gathered}\lambda_1(Q_j) \leqslant .. \leqslant \lambda_{k-1}(Q_j) < \lambda_k(Q_j) < \\ < \lambda_{k+1}(Q_j) \leqslant \ldots\lambda_{k+n}(Q_j).\end{gathered} \quad (6)$$

Далее нас будет интересовать принадлежащие оператору $L[Q_j]$ фиксированное k-е собственное значение и соответсвующая ему собственная функция, обозначаемые $\lambda(Q_j) := \lambda_k(Q_j)$ и $\phi(Q_j) := := \phi_k(Q_j)(x)$. Так, что

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi(Q_j) + q_j(x)\phi(Q_j) = \lambda(Q_j)\phi(Q_j), \quad x \in (0,1). \quad (7)$$

Поскольку последовательность $Q_j(x)$ ограничена, то она слабо компактна в $\mathcal{M}_n^2(0,1)$. Выделим из $Q_j(x)$ слабо-сходящуюся подпоследовательность $Q_{j_m}(x)$, далее не ограничивая общности перейдем к рассмотрению выделенной подпоследовательности, обозначаемую далее $Q_m(x) := Q_{j_m}(x)$. Слабый предел этой последовательности обозначим $Q_*(x)$.

Лемма 2. *Пусть последовательность $Q_j \in \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ ограничена и $\lambda_k(Q_j) = \lambda^* \in \mathbb{R}$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Тогда соответствующая последовательность k-х собственных функций $\phi_k(Q_j)(x)$, нормированных в $L^2(0,1)$, компактна в пространстве $W^{1,2}(0,1)$.*

Из леммы 2 следует, что последовательность $\phi(Q_m)$ компактна в $W^{1,2}(0,1)$, следовательно, найдется $\phi_*(x) \in W^{1,2}(0,1)$ такой, что

$$\phi_*(x) = \lim_{m\to\infty} \phi(Q_m). \quad (8)$$

Обозначим $G_0(x,\xi)$ ядро интегрального оператора $(L[Q_0] - \lambda^* I)^{-1}$. Члены последовательностей $\phi_n(x) = = \phi(Q_n)$ и $Q_n(x)$ удовлетворяют тождествам

$$\begin{gathered}\phi_n(x) = \lambda^* \int_0^1 G_0(x,\xi)(\phi_n(\xi) - \phi_*(\xi))d\xi - \\ - \int_0^1 G_0(x,\xi)Q_n(\xi)(\phi_n(\xi) - \phi_*(\xi))d\xi + \\ + \lambda^* \int_0^1 G_0(x,\xi)\phi_*(\xi)d\xi - \int_0^1 G_0(x,\xi)Q_n(\xi)\phi_*(\xi)d\xi.\end{gathered} \quad (9)$$

Учитывая сильную сходимость $\phi_*(x) = = \lim_{m\to\infty}\phi(Q_m)$ и слабую сходимость $Q_*(x) = = \lim_{m\to\infty} Q_m(x)$, перейдем в (9) к пределу, получим, что $\phi_*(x)$ и $Q_*(x)$ удовлетворяют тождеству

$$\phi_*(x) = = \lambda^* \int_0^1 G_0(x,\xi)\phi_*(\xi)d\xi - \int_0^1 G_0(x,\xi)Q_*(\xi)\phi_*(\xi)d\xi. \quad (10)$$

Очевидно, что полученное интегральное тождество экивалентно краевой задаче

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi_*(x) + Q_*(x)\phi_*(x) = \lambda^*\phi_*(x), \quad x \in (0,1). \quad (11)$$

Из нижеследующего утверждения (см. [9]) следует полуограниченность предельного оператора $L[Q_*]$

Лемма 3. *Пусть B — ограниченное подмножество $\mathcal{M}_n^2(0,1)$, тогда семейство операторов $\mathcal{L}[Q]$ равномерно полуограничено снизу для всех $Q \in B$, т.е.*

$$-\infty < \mu \leqslant \inf_{Q \in B} \inf\{\langle L[Q]\psi, \psi\rangle : \psi \in L^2, \|\psi\|_{L^2} = 1\}.$$

Далее заметим, что поскольку члены последовательности $\{Q_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$, $Q_j \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ удовлетворяли условию (6), то λ^* является k-м собственным значением оператора $L[Q_*]$. Таким образом, $\hat{Q} = Q_*$ и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\lambda_1(Q_0) \leqslant \lambda^*$. Тогда решение оптимизационной обратной спектральной задачи $(\mathcal{P}^0)$ для первого собственного значения $\lambda_1(Q)$ единственно.*

Доказательство. Введем в рассмотрение множество $M(\lambda) := \{Q \in \mathcal{M}_n^2(0,1) : \lambda \leqslant \lambda_1(Q)\}$. Заметим, что в силу соотношения (2) множество $M(\lambda)$ является выпуклым. Рассмотрим следующую задачу о минимизации

$$\breve{P} = \min\{\rho(Q) := \|Q_0 - Q\|^2_{\mathcal{M}_n} : Q \in M(\lambda^*)\}. \quad (12)$$

Из теоремы 1 следует существование решения задачи (12). Выпуклость множества $M(\lambda_1^*)$ и строгая выпуклость функционала расстояния $\rho(Q)$ обеспечивают единственность $\hat{Q}$ и

$$\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*) = \{Q \in M(\lambda_1^*) : \lambda_1(Q) = \lambda_1^*\}.$$

Тем самым свойство выпуклости первого собственного значения, кроме существования, дает единственность решения задачи $(\mathcal{P}^0)$. При этом условие $\lambda \leqslant \lambda_1(Q)$ является существенным.

Следующее утверждение является обощением и уточнением аналогичного результата из работы [7].

Теорема 2. *Пусть $\hat{Q}$ — решение задачи $(\mathcal{P}^0)$. Если $\lambda_k(\hat{Q})$ — собственное значение кратности p, тогда справедливо представление*

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k(x) \otimes \vec{u}_k(x), \quad (13)$$

где $\{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^{p}$ — ортонормированная система собственных функций оператора $L[\hat{Q}]$, соответствующая k-му собственному значению, равному λ_1^*, $\alpha_k \neq 0$, $k = 1,..,p$.

Если при этом $\lambda_k(Q_0) < \lambda^*$, тогда $\alpha_k > 0$, $k = 1,..,p$.

Доказательство этого утверждения основано на свойствах аналитичности (см. с. 470 в [14]) кратных собственных значений и частично изложена в работе [7].

Замечание 1. *В случае когда собственное значение $\lambda_k(\hat{Q})$ простое, нетрудно увидеть, что соответствующее уравнение с оптимальным потенциалом представимо в виде стационарной системы нелинейных уравнений Шрёдингера*:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2\vec{u}}{dx^2} + (Q_0 + \alpha\vec{u} \otimes \vec{u})\vec{u} = \lambda\vec{u}, \quad x \in (0,1), \\ \vec{u} \in D(L[Q_0]). \end{cases} \quad (14)$$

Выше была доказана единственность решения задачи $(\mathcal{P}^0)$ для первого собственного значения оператора $L[Q]$. В общем случае, для произвольного собственного значения, единственности может и не оказаться. В то же время утверждение теоремы 2, формула (13), позволяет установить еще одно важное свойство задачи $(\mathcal{P}^0)$.

Теорема 3. *Решение $\hat{Q} \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ оптимизационной обратной спектральной задачи $(\mathcal{P}^0)$ для любого собственного значения $\lambda_k(Q)$ изолировано в $\mathcal{M}_n^2(0,1)$.*

Приведем доказательство для случая простого собственного значения $\lambda_k(Q)$. Предположим, что $\hat{Q} \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ неизолированное решение задачи $(\mathcal{P}^0)$. Тогда существует последовательность решений $\hat{Q}_j \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ такая, что $\hat{Q}_j - \hat{Q} \to 0$, $j = 1,2,...$ Согласно теореме 2 справедливо представление $\hat{Q}_j(x) = Q_0(x) + \beta\vec{v}_j(x) \otimes \vec{v}_j(x)$ и

$$-\frac{d^2}{dx^2}\vec{v}_j + (Q_0(x) + \beta\vec{v}_j \otimes \vec{v}_j)\vec{v}_j = \lambda^* \vec{v}_j.$$

Положим $\delta_j = \vec{v}_j - \vec{v}$, введем малый параметр $\tau = \|\delta_j\|$ и запишем уравнение

$$\begin{aligned} &-\frac{d^2}{dx^2}(\vec{v} + \tau\delta_j) + \\ &+ (Q_0(x) + \beta(\vec{v} + \tau\delta_j) \otimes (\vec{v} + \tau\delta_j))(\vec{v} + \tau\delta_j) = \\ &= \lambda^* (\vec{v} + \tau\delta_j). \end{aligned}$$

Умножим скалярно обе части этого уравнения на $\vec{v}$ и разложим полученное тождество по малому параметру τ и тогда для τ^2 получим: $\int_0^1 (2(\delta_j, \vec{v})^2_{R^n} + (\delta_j, \delta_j)^2_{R^n})dx = 0$. Откуда получим противоречие.

Отметим, что для первого собственного значения оператора справедливо утверждение, обратное к теореме 2.

Теорема 4. *Пусть краевая задача*

$$-\frac{d^2}{dx^2}\vec{v} + (Q_0(x) + \beta\vec{v} \otimes \vec{v})\vec{v} = \lambda_1^*\vec{v}, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}(1) = 0, \tag{15}$$

имеет решение $\vec{v}(x)$ *такое, что* λ_1^* *является первым собственным значением оператора* $\mathcal{L}[Q_0(x) + \beta\vec{v} \otimes \vec{v}]$. *Тогда матричный потенциал* $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \beta\vec{v} \otimes \vec{v}$ *является решением задачи* $(\mathcal{P}^0)$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [7].

4. Пример. Согласно теореме 2 оптимальный потенциал $\hat{Q}$ задается формулой (13): $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k(x) \otimes \vec{u}_k(x)$, структура которой зависит от кратности p собственного значения $\lambda_k(\hat{Q})$. Рассмотрим простой пример, показывающий, что для $\lambda_k(\hat{Q})$ возможна любая кратность $p = 1, 2, .., n$.

Пусть заданы числа $\mu_1 < \mu_2 < .. < \mu_m$, $m \leqslant n$ и диагональный матричный потенциал

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} q_0(x) - \mu_1 & 0 & ..0 & 0 \\ 0 & q_0(x) - \mu_2 & ..0 & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & .\ 0 & q_0(x) - \mu_m \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\sigma_1(q_0) < \sigma_2(q_0) < ... < \sigma_j(q_0) < ..$, $\phi_j(x) \in L_2(0,1)$ собственные значения и соответствующие собственные функции краевой задачи $-\phi_j''(x) - q_0(x)\phi_j(x) = \sigma_j\phi_j(x)$, $\phi_j(0) = \phi_j(1) = 0$.

Для оператора $\mathcal{L}[Q]$, $Q \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$, рассмотрим задачу $(\mathcal{P})$: $\hat{Q} = \arg\min_{\lambda_1(Q)=\lambda_1^*} \|Q - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n^2(0,1)}$, где $\sigma_m(q_0) - \mu_1 < \lambda_1^*$. Пусть для p, $1 \leqslant p \leqslant m$ пар индексов (i, j) выполнены неравенства: $\sigma_i(q_0) - \mu_j < \lambda_1^*$, тогда задача $(\mathcal{P})$ имеет решение $\hat{Q}$ такое, что собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ имеет кратность p и $\hat{Q} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование Я.Т. Султанаева поддержано Российским научным фондом (грант № 23-21-00225).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Möller M., Zettl A.* Differentiable dependence of eigenvalues of operators in Banach spaces, Journal of Operator Theory. 1996. P. 335–355.
2. *Pöschel J., Trubowitz E.* Inverse spectral theory, volume 130 of Pure and Applied Mathematics, 1987.
3. *Yurko V.A.* Inverse Spectral Problems and their Applications, Saratov, PI Press, 2001. 499 p.
4. *Chu M., Golub G.H.* Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications, Vol. 13. Oxford University Press, 2005.
5. *Gladwell G.M.L.* Inverse Problems in Scattering: An Introduction, Kluwer Academic Publishers, 1993. https://doi.org/10.1007/978-94-011-2046-3
6. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф.* Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады академии наук. 2009. Т. 426. № 4. С. 457–460.
7. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф.* Оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1707–1711.
8. *Ilyasov Y.Sh., Valeev N.F.* On nonlinear boundary value problem corresponding to N-dimensional inverse spectral problem // J. Diff. Eq. 2019. V. 266. № 8. P. 4533–4543. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.10.003
9. *Yavdat Ilyasov, Nur Valeev.* Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2021. V. 426. 5 p. https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132985
10. *Egorov Y.V., Kondrat'ev V.A.* Estimates for the first eigenvalue in some Sturm-Liouville problems // Russian Math. Surv. 1996. V. 51. № 3. P. 439.
11. *Wei Q., Meng G., Zhang M.* Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in L1 balls // J. Diff. Eq. 2009. V. 247. № 2. P. 364–400.
12. *Shuyuan Guo, Zhang Meirong.* A Variational Approach to the Optimal Locations of the Nodes of the Second Dirichlet Eigenfunctions. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. https://doi.org/10.1002/mma.8930
13. *Guo H., Qi J.* Extremal norm for potentials of Sturm-Liouville eigenvalue problems with separated boundary conditions // EJDE. 2017. V. 99. P. 1–11. http://ejde.math.unt.edu
14. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Наука.1972. 740 с.

OPTIMIZATION SPECTRAL PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR IN THE SPACE OF VECTOR FUNCTIONS

Academician of the RAS V. A. Sadovnichii[a], Ya. T. Sultanaev[b,c], and N. F. Valeev[d]

[a] *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[b] *Bashkir State Pedagogical University n.a. M. Akmulla, Ufa, Russian Federation*
[c] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*
[d] *Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa, Russian Federation*

An inverse spectral optimization problem is considered: for a given matrix potential $Q_0(x)$ it is required to find the matrix function $\hat{Q}(x)$ closest to it, such that the k-th eigenvalue of the Sturm–Liouville matrix operator with potential $\hat{Q}(x)$ matched the given value λ^*. The main result of the paper is the proof of existence and uniqueness theorems. Explicit formulas for the optimal potential are established through solutions to systems of nonlinear differential equations of the second order, known in mathematical physics as systems of nonlinear Schrödinger equations

Keywords: inverse spectral problem, optimization problem, vector Sturm-Liouville operator, non-linear system of Schrödinger equations