ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 512, с. 52–57

МАТЕМАТИКА

УДК 519.179.1, 519.179.4

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ПОЛНОЦВЕТНЫХ РАСКРАСОК СЛУЧАЙНОГО ГИПЕРГРАФА

 Д. Н. Тяпкин[1], Д. А. Шабанов[2]

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым
Поступило 30.03.2023 г.
После доработки 05.05.2023 г.
Принято к публикации 20.05.2023 г.

В работе исследуется структура множества полноцветных раскрасок в три цвета у случайного гиперграфа в равномерной модели $H(n,k,m)$. Хорошо известно, что свойство наличия полноцветной раскраски в заданное число цветов r имеет точную пороговую функцию, такое пороговое значение $\hat{m}_r = \hat{m}_r(n)$, что для любого $\varepsilon > 0$ при $m \leqslant (1-\varepsilon)\hat{m}_r$ случайный гиперграф $H(n,k,m)$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, обладает подобной раскраской, а при $m \geqslant (1+\varepsilon)\hat{m}_r$ – наоборот, не обладает подобной раскраской с вероятностью, стремящейся к 1. Мы исследуем алгоритмическую границу для свойства полноцветной раскраски в три цвета и доказываем, что если параметр m принимает значения несколько меньше, чем $\hat{m}_3$, то множество трехцветных полноцветных раскрасок $H(n,k,m)$ хоть и не пусто с вероятностью, стремящейся к 1, но при этом подчиняется эффекту шаттеринга, впервые описанного в работе Д. Аклиоптаса и А. Койя-Оглана 2008 г.

Ключевые слова: случайный гиперграф, раскраски гиперграфов, полноцветные раскраски, шаттеринг

DOI: 10.31857/S2686954323600179, **EDN:** PURWMK

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованиям по теории случайных графов и гиперграфов. Приведем сначала основные определения и обозначения.

1.1. Основные определения

Гиперграфом H в дискретной математике называется пара $H = (V,E)$, где $V = V(H)$ – это множество вершин, а $E = E(H) \subseteq 2^V$ – это семейство подмножеств вершин, называемых ребрами. Гиперграф называется *k-однородным*, если всякое ребро является k-подмножеством вершин. В частности, 2-однородные гиперграфы – это в точности обычные графы без петель и кратных ребер.

В настоящей работе мы изучаем классическую модель случайного гиперграфа $H(n,k,m)$, являющуюся случайным элементом с равномерным распределением на всех k-однородных гиперграфах с n вершинами и m ребрами. Также $H(n,k,m)$ называется *равномерной моделью* случайного гиперграфа. В рамках статьи мы предполагаем, что $k \geqslant 3$ фиксировано, $n \to +\infty$, а $m = m(n)$ некоторым образом зависит от n.

Раскраской гиперграфа H в r цветов называется отображение $\sigma : H \to [r] = \{1,\ldots,r\}$. Раскраска называется *правильной*, если в ней всякое ребро гиперграфа не является одноцветным. Раскраска называется *полноцветной*, если в ней всякое ребро содержит вершины всех r цветов.

Для двух гиперграфов A, B обозначим через $\mathrm{Hom}(A,B)$ множество гомоморфизмов из гиперграфа в A в гиперграф B. Для двух раскрасок τ и σ гиперграфа H обозначим через $\mathrm{dist}(\sigma,\tau)$ расстояние Хэмминга между ними: $\mathrm{dist}(\sigma,\tau) = |\{v \in V(H) | \sigma(v) \neq \tau(v)\}|$.

Наконец, будем говорить, что последовательность событий $\mathscr{E}_n$ на вероятностном простран-

[1] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, факультет компьютерных наук; Московский физико-технический институт, лаборатория комбинаторных и геометрических структур, Москва, Россия*

[2] *Московский физико-технический институт, лаборатория комбинаторных и геометрических структур; Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, факультет компьютерных наук, Москва, Россия*

**E-mail: dtyapkin@hse.ru*

***E-mail: shabanov.da@mipt.ru*

стве выполняется *асимптотически почти наверное* (а.п.н.), если $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}[\mathscr{E}_n] = 1$.

1.2. История и постановка задачи

Раскраски графов и гиперграфов имеют широкое применение не только в теоретической информатике как пример вычислительно-сложной задачи, но и в статистической физике [1]. Известно, что задача нахождения хроматического числа графа является NP-трудной [2, 3]. Более того, в случае графов искать сложно даже приближенное решение [4].

Ситуация становится заметно более интересной, когда мы рассматриваем “случайный” граф или гиперграф и допускаем некоторую вероятность ошибки. В самых естественных моделях случайных графов и гиперграфов — равномерной и биномиальной, возникает эффект пороговых функций и вероятностей, когда асимптотика вероятности наличия раскраски быстро меняется от 1 до 0 при увеличении среднего числа ребер. Тем самым мы можем сразу говорить о наличии (с большой вероятностью) искомой раскраски, если среднее число ребер находится ниже порогового значения. Обсудим данный феномен более детально на примере проблемы правильной 2-раскрашиваемости случайного k-однородного гиперграфа $H(n,k,m)$.

Задаче о нахождении точной пороговой функции для свойства 2-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,m)$ была поставлена Алоном и Спенсером в [5]. Они показали, что пороговому значению отвечает так называемый разреженный случай, когда число ребер $m = cn$ является линейной функцией от числа вершин, т.е. $c > 0$ не зависит от n. Сформулируем результаты [5] в виде теоремы.

Теорема 1 (Н. Алон, Дж. Спенсер, [5]). 1) *Если*

$$c > 2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{2} + o_k(1), \tag{1}$$

то а.п.н. случайный гиперграф $H(n,k,\lceil cn\rceil)$ *не допускает правильной раскраски в два цвета.*

2) *Существует такая абсолютная константа* $\delta > 0$, *что если*

$$c < \delta\cdot\frac{2^k}{k^2}, \tag{2}$$

то а.п.н. для $H(n,k,\lceil cn\rceil)$ *существует правильная раскраска в два цвета.*

В дальнейшем оценки (1), (2) неоднократно улучшались (см. [6–8]). Наилучший из известных результат был получен А. Койя-Огланом и К. Панайоту [9].

Теорема 2 (А. Койя-Оглан, К. Панайоту, [9]). *Существует такая функция* $\varepsilon(k) = 2^{-k(1+o_k(1))}$, *что если*

$$c > 2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2} + \varepsilon(k), \tag{3}$$

то а.п.н. случайный гиперграф $H(n,k,\lceil cn\rceil)$ *не допускает правильной раскраски в два цвета. А если*

$$c < 2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2} - \varepsilon(k), \tag{4}$$

то а.п.н. для $H(n,k,\lceil cn\rceil)$ *существует правильная раскраска в два цвета.*

Оценки (3), (4) показывают, что пороговое значение параметра c весьма хорошо локализовано. Однако даже эти результаты не позволяют решить проблему алгоритмического нахождения раскраски в ситуации, когда число ребер меньше порога правильной 2-раскрашиваемости и мы знаем, что такая раскраска для случайного гиперграфа существует с вероятностью, близкой к 1. На рубеже веков в ряде работ были предложены *полиномиальные* алгоритмы для поиска правильной раскраски у случайных графов и гиперграфов. Но эти результаты показывали, что предложенный алгоритм работает, только если число ребер заметно меньше порогового значения. Например, в работе Д. Аклиоптаса, Дж. Кима, М. Кривелевича, П. Тетали [6] была доказана следующая теорема.

Теорема 3 (Д. Аклиоптас, Дж. Ким, М. Кривелевич, П. Тетали, [6]). *Если*

$$c < \frac{1}{25}\frac{2^k}{k}, \tag{5}$$

то существует полиномиальный алгоритм, который а.п.н. находит правильную 2-*раскраску случайного гиперграфа* $H(n,k,\lceil cn\rceil)$.

Отметим, что оценка (5) по порядку в k раз меньше, чем пороговое значение (см. (3), (4)). Аналогична ситуация и для свойств раскраски случайных графов в заданное r цветов (см. [10–12]): между значениями числа ребер графа, при котором существует раскраска, и при котором ее способен найти алгоритм, существует зазор примерно в 2 раза. Данное наблюдение привело исследователей к простому выводу: около порогового значения сама структура множества правильных раскрасок графа или гиперграфа препятствует построению быстрого алгоритма для поиска хотя бы одного из ее элементов. В математическое утверждение подобное наблюдение было оформлено в прорывной работе Д. Аклиоптаса и А. Койя-Оглана [13]. Авторы [13] доказали, что при значении c, достаточно близком к (4), происходит некоторый фазовый переход пространства правильных 2-раскрасок $H(n,k,\lceil cn\rceil)$: оно дробится на экспоненциально большое число маленьких областей, и чтобы пройти между ними, нужно перекрасить очень много вершин, при этом во время перекраски по одной вершине мы гарантированно попадем в ситуацию, когда будет неправильно покрашено большое число ребер. Этот эффект был назван *шаттерингом*, так как в этом случае пространство решений буквально рассыпается на маленькие осколки. Более точное описание шаттеринга мы дадим в следующем параграфе, а пока лишь отметим, что авторы [13] доказали его возникновение при

$$c = \frac{2^{k-1}\ln k}{k}(1+o_k(1)). \qquad (6)$$

Тем самым нижняя граница (6) практически совпадает с алгоритмической (5), а верхняя очень близка с пороговой (3)–(4).

Целью настоящей работы было исследование феномена шаттеринга для другого вида раскрасок гиперграфов, который является естественным обобщением правильных 2-раскрасок, а именно — для полноцветных раскрасок в 3 цвета. Полноцветные раскраски гиперграфов были впервые предложены для изучения в классической работе П. Эрдеша и Л. Ловаса [14] и с тех пор активно изучаются. Известно (см. [15]), что задача о поиске полноцветной раскраски NP-трудна, поэтому задача нахождения барьеров в случайных гиперграфах для вычисления этих раскрасок на случайных данных также крайне интересна.

Пороговая функция для свойства полноцветной 3-раскрашиваемости случайного гиперграфа хорошо изучена. Имеет место следующая теорема, доказанная Д. Кравцовым, Н. Крохмалем и Д. Шабановым [16].

Теорема 4 (Д. Кравцов, Н. Крохмаль, Д. Шабанов, [16]). *Существует такое* $k_0 \in \mathbb{N}$, *что для любого* $k > k_0$ *выполнено следующее. Если*

$$c < \frac{\ln 3}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^k - \frac{\ln 3}{2} + \mathbb{O}_k\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\right), \qquad (7)$$

то а.п.н. для случайного гиперграфа $H(n,k,\lceil cn\rceil)$ *существует полноцветная раскраска в* 3 *цвета. А если*

$$c > \frac{\ln 3}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^k - \frac{\ln 3}{2} + \mathbb{O}_k\left(\left(\frac{3}{4}\right)^k\right), \qquad (8)$$

то а.п.н. случайный гиперграф $H(n,k,\lceil cn\rceil)$ *не допускает полноцветных раскрасок в* 3 *цвета*.

В заключение обзора литературы отметим, что обобщение теоремы 4 на случай полноцветных r-раскрасок, $r \geqslant 4$, было найдено в работе [17], а некоторые результаты о структуре множества правильных раскрасок в r цветов около порогового значения были получены в [18].

2. НОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата работы введем еще несколько обозначений. Множество раскрасок в r цветов гиперграфа H на n вершинах обозначим через $\mathcal{C}_r(n)$. Расстояние Хэмминга порождает на множестве $\mathcal{C}_r(n)$ структуру графа, в которой мы считаем раскраски вершинами и соединяем ребром те пары, которые находятся на единичном расстоянии, т.е. отличаются цветом лишь одной вершины гиперграфа. Для гиперграфа H определим *функцию высоты* $\rho_H : \mathcal{C}_r(n) \to \mathbb{N}$, которая сопоставляет каждой раскраске количество ребер с нарушенными ограничениями: в случае полноцветных 3-раскрасок — это количество ребер, в которых отсутствуют вершины хотя бы одного из трех цветов. Через $\mathcal{S}(H)$ обозначим множество раскрасок с нулевым значением функции высоты: $\mathcal{S}(H) = \{\sigma \in \mathcal{C}_r(n) | \rho_H(\sigma) = 0\}$, т.е. это и есть искомое множество полноцветных раскрасок в 3 цвета.

В соответствии с метрикой введем понятие *высоты пути* $\sigma_1,\ldots,\sigma_t \in \mathcal{C}_r(n)$ как максимальную высоту вершин на этом пути: $\rho_H(\sigma_1, \ldots, \sigma_t) = \max_{i=1,\ldots,t}\rho_H(\sigma_i)$, *кластера* как множество связных компонент $\mathcal{S}(H)$ и *региона* как непустое объединение кластеров.

Нас будут интересовать типичная структура $\mathcal{S}(H(n,k,m))$, как соответствующего случайного подмножества $\mathcal{C}_r(n)$.

Определение 1. *Множество полноцветных* 3*-раскрасок гиперграфа* $H(n,k,m)$ *претерпевает **шаттеринг**, если существуют такие четыре константы* $\beta,\gamma,\zeta,\theta > 0$, *что а.п.н.* $\mathcal{S}(H(n,k,m))$ *можно разделить на регионы со следующими условиями:*

1. количество регионов не меньше $\exp(\beta n)$;
2. во всяком регионе содержится не более чем $\exp(-\gamma n)$ доли всех полноцветных 3-раскрасок раскрасок;
3. расстояние между любыми двумя регионами не менее ζn;
4. каждый путь между двумя вершинами двух различных регионов имеет высоту не менее θn.

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему работы.

Теорема 5. *Существует такая последовательность* ε_k *с условием* $\varepsilon_k \to 0$ *при* $k \to \infty$, *что для всех* c, *удовлетворяющих неравенству*

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{\ln k + \ln 2}{3k} \leqslant c \leqslant (1-\varepsilon_k)\left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{\ln 3}{3},$$

пространство полноцветных 3*-раскрасок случайного* k*-однородного гиперграфа* $H(n,k,\lceil cn\rceil)$ *претерпевает шаттеринг с вероятностью, стремящейся к* 1.

Отметим, что полученная верхняя граница соответствует нижней оценке порогового значения из работы [16] (см. (7), (8)), а нижняя граница, как и в (6), примерно в k раз ее меньше, что говорит о ее потенциальной близости к алгоритмической границе.

3. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Изложим общий план доказательства в виде трех последовательных шагов.

3.1. Теорема о переносе

Наша основная задача – исследовать “типичное” поведение множества почти всех полноцветных 3-раскрасок с большой вероятностью, поэтому разумно исследовать “типичные раскраски”. Формально это можно описать при помощи равномерного распределения на множестве полноцветных 3-раскрасок случайного гиперграфа.

Обозначим через $\Lambda_{n,\ m} = \{(H,\ \sigma) : H \in \mathcal{H}_{n,m}, \sigma \in \mathcal{S}(H)\}$, где $\mathcal{H}_{n,m}$ – множество всех k-однородных гиперграфов на n вершинах с m ребрами. Это интересующее нас множество пар. На этом множестве можно рассмотреть распределение $\mathcal{U}_{n,m}$, задающееся следующим образом:

1. выберем $H \in \mathcal{H}_{n,m}$ равновероятно;

2. если $\mathcal{S}(H) \neq \varnothing$, то выберем $\sigma \in \mathcal{S}(H)$ равновероятно.

Но исследовать подобный объект крайне сложно. Вместо этого существует другая, более простая для анализа модель, которая называется planted model и обозначается $\mathcal{P}_{n,m}$, и задается она перестановкой выбора раскраски и гиперграфа:

1. выберем $\sigma \in \mathcal{C}_3(n)$ равновероятно;

2. выберем $H \in \mathcal{H}_{n,m}$ равновероятно среди всех таких гиперграфов, что $\sigma \in \mathcal{S}(H)$.

Но тогда нам нужно уметь переносить результаты, которые мы сможем доказать для $\mathcal{P}_{n,m}$, в модель $\mathcal{U}_{n,m}$. Для этого нами доказана следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы из [13] на случай полноцветных раскрасок.

Теорема 6 [о переносе]. *Существует такое* $\varepsilon_k = o_k(1)$, *что если*

$$c \leqslant (1-\varepsilon_k)\frac{\ln 3}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^k,$$

то существует такая функция $f(n) = o(n)$, *что для всякого свойства* $\mathcal{E}$ *пар* (H, σ) *с условием*

$$\mathrm{P}(\mathcal{P}_{n,\lceil cn\rceil} \in \mathcal{E}) \geqslant 1 - \exp(-f(n)),$$

выполнено $\mathrm{P}(\mathcal{U}_{n,\lceil cn\rceil} \in \mathcal{E}) = 1 - o(1)$.

Ключевым фактом, необходимым для доказательства теоремы 6, является следующая лемма.

Лемма 1. *Существуют такие функция* $g(n) = o(n)$ *и последовательность* $\varepsilon_k = o_k(1)$, *что при*

$$c \leqslant (1-\varepsilon_k)\frac{\ln 3}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

а.п.н. верно

$$|\mathcal{S}(H(n,k,\lceil cn\rceil))| \geqslant e^{-g(n)} \cdot \mathrm{E}|\mathcal{S}(H(n,k,\lceil cn\rceil))|.$$

Доказательство леммы 1, в свою очередь, требует использования результатов о методе второго момента из работы [16], а также обоснования существования точной пороговой функции для свойства существования хотя бы N гомоморфизмов (при $0 < N < o(3^n)$) в случайном гиперграфе $H(n,k,m)$.

Для этого мы обобщили результат Х. Хатами и М. Моллоя [19] о точном пороге существования гомоморфизма между гиперграфами до точного порога для свойства существования хотя бы N гомоморфизмов.

Лемма 2. *Пусть* R – *фиксированный* k*-однородный гиперграф с* r *вершинами, а* $N = N(n)$ – *некоторая функция с условиями* $0 < N < o(r^n)$. *Тогда свойство* $\mathcal{A}_N = \{H : |\mathrm{Hom}(H,R)| \leqslant N\}$ *имеет точную пороговую функцию в модели* $H(n,k,m)$, *т.е. существует такая функция* $\hat{m} = \hat{m}(n)$, *что для любого* $\delta > 0$ *при* $m \leqslant (1-\delta)\hat{m}$ *выполнено*

$$P\big(H(n,k,m) \in \mathcal{A}_N\big) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а при $m \geqslant (1+\delta)\hat{m}$ *выполнено*

$$P\big(H(n,k,m) \in \mathcal{A}_N\big) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Прямым следствием леммы 2 является существование точной пороговой функции для свойства наличия хотя бы N полноцветных 3-раскрасок. Отметим, что лемма 2 имеет самостоятельный интерес.

3.2. Анализ planted model

Согласно определению модели $\mathcal{P}_{n,m}$ она состоит из случайной раскраски σ и выбираемой по ней случайного гиперграфа H. Рассмотрим их как функции $\sigma = \sigma(\mathcal{P}_{n,m})$, $H = H(\mathcal{P}_{n,m})$.

Для любой раскраски $\tau \in \mathcal{C}_3(n)$ введем матрицу $A_{\sigma,\tau} = (a_{ij}(\sigma,\tau) : i,j = 1,2,3)$, где

$$a_{ij}(\sigma,\tau) = \frac{3}{n}|\sigma^{-1}(i) \cap \tau^{-1}(j)|$$

– число вершин, покрашенных в цвет i в раскраске σ и в цвет j в раскраске τ. Если раскраски были заранее фиксированы, то будем опускать зависимость от них: $a_{ij} = a_{ij}(\sigma,\tau)$, $A = A_{\sigma,\tau}$. Рассмотрим далее следующую функцию:

$$q(\sigma,\tau) = \sum_{i,j=1}^{3}[(1+a_{ij})^k - 2(1-a_{ij})^k + a_{ij}^k]. \qquad (9)$$

Эта функция будет в некотором смысле играть роль оценки расстояния, однако эта мера будет вырожденной: слагаемые могут быть отрицательными, но по-прежнему мы можем сформулировать важные технические утверждения, которые по сути будут переформулировкой условий шаттеринга в терминах функции q. Для этого рассмотрим следующую случайную величину:

$$\Gamma_{\sigma,\lambda}(x) = |\{\tau \in \mathcal{C}_3(n) : q(\sigma,\tau) = x, \rho_H(\tau) \leqslant \lambda n\}|.$$

Выполнена следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $c > c_{\text{shat}} = (3/2)^k \ln(2k)/(3k)$ *и* $c \leqslant (1-\varepsilon_k)(3/2)^k$ *для* $\varepsilon_k \to 0$ *при* $k \to +\infty$. *Тогда найдутся такие* $-1 < y_1 < y_2 < 3(2^k+1)$ *и* $\lambda, \gamma > 0$, *что пара* (H,σ), *выбранная по схеме* $\mathcal{P}_{n,\lceil cn\rceil}$, *обладает следующими свойствами с вероятностью* $1 - \exp(-\Omega(n))$:

1. *для всех* $x \in [y_1, y_2] : \Gamma_{\sigma,\lambda}(x) = 0$;

2. *количество раскрасок* $\tau \in \mathcal{S}(H)$ *таких, что* $q(\sigma,\tau) > y_2$ *не больше, чем*

$$\exp\left(n(-\gamma + \ln 3 + c\ln(1 - 3(2/3)^k + 3(1/3)^k))\right).$$

3.3. Завершение доказательства

При помощи теоремы о переносе 6, леммы 1 и известного значения математического ожидания $\mathcal{S}(H(n,k,\lceil cn\rceil))$ (см. [16]) мы выводим аналог леммы 3 для модели $\mathcal{U}_{n,\lceil cn\rceil}$.

Лемма 4. *Пусть* $c > c_{\text{shat}} = (3/2)^k \ln(2k)/(3k)$ *и* $c \leqslant (1-\varepsilon_k)(3/2)^k$ *для* $\varepsilon_k \to 0$ *при* $k \to +\infty$. *Тогда найдутся такие* $-1 < y_1 < y_2 < 3(2^k+1)$ *и константы* $\lambda, \gamma > 0$, *что пара* (H,σ), *выбранная по схеме* $\mathcal{U}_{n,\lceil cn\rceil}$, *обладает следующими свойствами а.п.н.*:

1. *для всех* $x \in [y_1, y_2] : \Gamma_{\sigma,\lambda}(x) = 0$;

2. *количество раскрасок* $\tau \in \mathcal{S}(H)$ *таких, что* $q(\sigma,\tau) > y_2$ *не больше, чем* $e^{-\gamma n} \mid \mathcal{S}(H) \mid$.

Наконец, лемма 4 позволяет доказать основную теорему 5. Назовем раскраску σ *типичной*, если для нее верны оба пункта леммы 4. Для всякой типичной раскраски σ рассмотрим соответствующий ей регион:

$$R_\sigma = \{\tau \in \mathcal{S}(H) : q(\sigma,\tau) > y_2\}.$$

Будем разбивать $\mathcal{S}(H)$ на такие соответствующие регионы. Согласно второму утверждению леммы 4, в каждом таком регионе содержится не более чем экспоненциально маленькая доля всех правильных раскрасок, откуда напрямую следует, что для того, чтобы покрыть все $\mathcal{S}(H)$, их нужно экспоненциально много. Нетрудно показать, что для всякой $\tau \not\in R_\sigma$:

- $\text{dist}(\sigma,\tau) \geqslant \delta n$ для некоторого $\delta > 0$;
- для всякого пути из σ в τ найдется σ' из этого пути, такая что $q(\sigma,\sigma') \in [y_1, y_2]$.

В силу первого утверждения леммы 4 и определения $\Gamma_{\sigma,\lambda}$ мы сразу получаем утверждение теоремы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00411.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krzakala F., Montanari A., Ricci-Tersenghi F., Semerjian G., Zdeborová L.* Gibbs states and the set of solutions of random constraint satisfaction problems // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2007. V. 104. № 25. P. 10318–10323. https://doi.org/10.1073/pnas.0703685104
2. *Karp R.M.* Reducibility among Combinatorial Problems // Complexity of Computer Computations: Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations. Springer US. 1972. P. 85–103. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9
3. *Dinur I., Regev O. Smyth C.* The hardness of 3-Uniform hypergraph coloring // The 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2002. Proceedings. 2002. P. 33–40. https://doi.org/10.1109/SFCS.2002.1181880
4. *Lund C., Yannakakis M.* On the hardness of approximating minimization problems // J. ACM. 1994. V. 41. № 5. P. 960–981. https://doi.org/10.1145/185675.306789
5. *Alon N., Spencer J.* A note on coloring random k-sets // unpublished manuscript, http://www.cs.tau.ac.il/?nogaa/PDFS/kset2.pdf.
6. *Achlioptas D., Kim J.H., Krivelevich M., Tetali P.* Two-colorings random hypergraphs // Random Structures and Algorithms. 2002. V. 20. № 2. P. 249–259. https://doi.org/10.1002/rsa.997
7. *Achlioptas D., Moore C.* Random k-SAT: two moments suffice to cross a sharp threshold // SIAM Journal on Computing. 2005. V. 36. № 3. P. 740–762.
8. *Coja-Oghlan A., Zdeborová L.* The condensation transition in random hypergraph 2-coloring // Proc. 23rd Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms. SIAM. 2012. P.241–250.
9. *Coja-Oghlan A., Panagiotou K.* Catching the k-NAESAT threshold // Proc. 44th STOC. 2012. P. 899–908.
10. *Achlioptas D., Molloy M.*, The analysis of a list-coloring algorithm on a random graph // Proceedings 38th An-

nual Symposium on Foundations of Computer Science. 1997. P. 204–212.

11. *Coja-Oghlan A., Vilenchik D.* The Chromatic Number of Random Graphs for Most Average Degrees // International Mathematics Research Notices. 2015. V. 2016. № 19. P. 5801–5859. https://doi.org/10.1093/imrn/rnv333
12. *Coja-Oghlan A.* Upper-bounding the k-colorability threshold by counting cover // Electronic Journal of Combinatorics. 2013. V. 20. № 3. Research paper №32. https://doi.org/10.37236/3337
13. *Achlioptas D., Coja-Oghlan A.* Algorithmic Barriers from Phase Transitions // 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2008. P. 793–802.
14. *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and Finite Sets. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 1973. V. 10. P. 609–627.
15. *Guruswami V., Saket R.* Hardness of Rainbow Coloring Hypergraphs // 37th IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2017). Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). 2018. V. 93. P. 33:01–33:15. https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2017.33
16. *Kravtsov D.A., Krokhmal N.E., Shabanov D.A.* Panchromatic 3-colorings of random hypergraphs // European Journal of Combinatorics. 2019. V. 78. P. 28–43. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2019.01.006
17. *Кравцов Д.А., Крохмаль Н.Е., Шабанов Д.А.* Полноцветные раскраски случайных гиперграфов // Дискретная математика. 2019. Т. 31. №2. С. 84–113. https://doi.org/10.1515/dma-2021-0003
18. *Ayre P., Greenhill C.* Rigid Colorings of Hypergraphs and Contiguity // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 2019. V. 33. № 3. P. 1575–1606. https://doi.org/10.1137/18M1207211
19. *Hatami H., Molloy M.* Sharp thresholds for constraint satisfaction problems and homomorphisms // Random Structures and Algorithms. 2008. V. 33. № 3. P. 310–332. https://doi.org/10.1002/rsa.20225

ON THE STRUCTURE OF THE SET OF PANCHROMATIC COLORINGS OF A RANDOM HYPERGRAPH

D. N. Tyapkin[a] and D. A. Shabanov[b]

[a] *National Research University "Higher School of Economics", Faculty of Computer Science, Moscow Institute of Physics and Technology, Laboratory of Combinatorial and Geometric Structures, Moscow, Russian Federation*

[b] *Moscow Institute of Physics and Technology, Laboratory of Combinatorial and Geometric Structures, National Research University "Higher School of Economics", Faculty of Computer Science, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev

The paper deals with the structure of the set of panchromatic colorings with three colors of a random hypergraph in the uniform model $H(n,k,m)$. It is well known that the property of the existence of a panchromatic coloring with given number of colors r has the sharp threshold, i.e. there exists the threshold value $\hat{m}_r = \hat{m}_r(n)$ such that for any $\varepsilon > 0$, if $m \leqslant (1-\varepsilon)\hat{m}_r$ then the random hypergraph $H(n,k,m)$ admits this coloring with probability tending to 1, but if $m \geqslant (1+\varepsilon)\hat{m}_r$ then, vice versa, it does not admit this coloring with probability tending to 1. We study the algorithmic threshold for the property of panchromatic coloring with three colors and prove that if the parameter m is slightly less than $\widehat{m}_3$, then the set of panchromatic 3-colorings of $H(n,k,m)$ although it is not empty with a probability tending to 1, but at the same time it obeys the shattering effect, first described in the work of D. Achlioptas and A. Coja-Oghlan in 2008.

Keywords: random hypergraph, colorings of hypergraphs, panchromatic colorings, shattering