



# ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 516, 2024

---

---

## МАТЕМАТИКА

- О восстановлении операторов Колмогорова с разрывными коэффициентами  
*В. И. Богачев, С. В. Шапошников* 5
- Точные оценки функций в пространствах Соболева с равномерной нормой  
*Д. Д. Казимиров, И. А. Шейнак* 9
- О неразрешимости теорий подмножеств некоторых унарков  
*Б. Н. Карлов* 15
- Индукцированные леса и деревья в случайном графе Эрдёша–Реньи  
*М. Б. Ахмеджанова, В. С. Кожневников* 21
- Обобщенное решение смешанной задачи для волнового уравнения с негладкой правой частью  
*И. С. Ломов* 26
- О ядрах инвариантных расширений оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями. Задача Гриневича–Новикова  
*М. Маламуд, В. Марченко* 31
- Совместная логика задач и высказываний  
*С. А. Мелихов* 38
- Описание турбулентных течений с помощью кинетической модели  
*Б. Н. Четверушкин, А. Е. Луцкий, Е. В. Шильников* 51
- Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях со сколь угодно большой длиной периода  
*В. П. Платонов, Г. В. Федоров* 59
- Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией  
*М. В. Шамолин* 65
- Об одной экстремальной задаче для финитных положительно определённых функций  
*А. Д. Манов* 75
- Об инварианте крашенных кос  
*В. О. Мантуров, И. М. Никонов* 79
- Максимальные индуцированные деревья в разреженных случайных графах  
*Х. К. Буитраго Оропеса* 83

Об оценке Боярского–Мейерса для градиента решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка со сносом. Случай критического показателя Соболева

*Ю. А. Алхутов, А. Г. Чечкина*

87

Проблема обращения преобразований Радо на псевдовыпуклых множествах

*Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова*

93

Мульти-вихри и оценки снизу фрактальной размерности аттракторов для системы уравнений Навье–Стокса

*А. Г. Костялко, А. А. Ильин, Д. Стоун, С. В. Зелик*

98

## **ИНФОРМАТИКА**

Применение методов с машинным обучением для управления сетевой вычислительной инфраструктурой

*Р. Л. Смелянский, Е. П. Степанов*

103

# Contents

---

---

**Volume 516, 2024**

---

---

## MATHEMATICS

On Reconstruction of Kolmogorov Operators with Discontinuous Coefficients <i>V. I. Bogachev, S. V. Shaposhnikov</i>	5
Exact Estimates of Functions in Sobolev Spaces with Uniform Norm <i>D. D. Kazimirov, I. A. Sheipak</i>	9
On Undecidability of Subset Theories of Some Unars <i>B. N. Karlov</i>	15
Induced Forests and Trees in Erdős–Rényi Random Graph <i>M. B. Akhmejanova, V. S. Kozhevnikov</i>	21
Generalized Solution of a Mixed Problem for a Wave Equation with a Non-Smooth Right-Hand Side <i>I. S. Lomov</i>	26
On Kernels of Invariant Schrödinger Operators with Point Interactions. Grinevich–Novikov Conjecture <i>M. M. Malamud, V. V. Marchenko</i>	31
A Joint Logic of Problems and Propositions <i>S. A. Melikhov</i>	38
Description of Turbulent Flows Using a Kinetic Model <i>B. N. Chetverushkin, A. E. Lutsky, E. V. Shilnikov</i>	51
Continued Fractions in Hyperelliptic Fields with an Arbitrarily Large Period Length <i>V. P. Platonov, G. V. Fedorov</i>	59
Invariants of Seventh-Order Homogeneous Dynamical Systems with Dissipation <i>M. V. Shamolin</i>	65
On an Extremal Problem for Compactly Supported Positive Definite Functions <i>A. D. Manov</i>	75
On an Invariant of Pure Braids <i>V. O. Manturov, I. M. Nikonov</i>	79
Maximum Induced Trees in Sparse Random Graphs <i>J. C. Buitrago Oropeza</i>	83

On the Boyarsky–Meyers Estimate for the Gradient of the Solution to the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift. The Case of the Critical Sobolev Exponent	87
<i>Yu. A. Alkhutov, A. G. Chechkina</i>	
Inversion Problem for Radon Transforms Defined on Pseudoconvex Sets	93
<i>D. S. Anikonov, D. S. Konovalova</i>	
Multi-vortices and Lower Bounds for the Attractor Dimension of 2D Navier–Stokes Equations	98
<i>A. G. Kostianko, A. A. Ilyin, D. Stone, S. V. Zelik</i>	
<b>COMPUTER SCIENCE</b>	
On ML Methods for Network Powered by Computing Infrastructure	103
<i>R. L. Smeliansky, E. P. Stepanov</i>	

УДК 517.955

## О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ КОЛМОГОРОВА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2024 г. Член-корр. РАН В. И. Богачев<sup>1, 2, 3, \*</sup>, С. В. Шапошников<sup>1, 2, \*\*</sup>

Поступило 23.01.2024 г.  
После доработки 09.02.2024 г.  
Принято к публикации 09.02.2024 г.

Получены широкие условия для восстановления коэффициентов оператора Колмогорова по решению задачи Коши для соответствующего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

*Ключевые слова:* оператор Колмогорова, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, мартингальная задача

DOI: 10.31857/S2686954324020018, EDN: XJFWEY

Оператором Колмогорова с зависящими от времени коэффициентами на  $\mathbb{R}^d$  называют эллиптический дифференциальный оператор второго порядка вида

$$L\varphi(x, t) = \sum_{i, j \leq d} a^{ij}(x, t) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi(x) + \sum_{i \leq d} b^i(x, t) \partial_{x_i} \varphi(x),$$

где для фиксированного отрезка  $[\tau, T]$  на  $\mathbb{R}^d \times [\tau, T]$  заданы отображение  $b = (b^i)$  со значениями в  $\mathbb{R}^d$  и отображение  $A = (a^{ij})$  со значениями в пространстве неотрицательно определенных симметричных  $d \times d$ -матриц, причем функции  $b^i$  и  $a^{ij}$  измеримы по Борелю. Для такого оператора ставится задача Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t \mu_t = \sum_{i, j \leq d} \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \mu_t) - \sum_{i \leq d} \partial_{x_i} (b^i \mu_t) \quad (1)$$

с начальным условием  $\mu_\tau = \nu$ , где  $\nu$  – борелевская вероятностная мера на  $\mathbb{R}^d$ . Вероятностным решением указанной задачи Коши называется семейство  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$  борелевских вероятностных мер на  $\mathbb{R}^d$ , для которых функция  $t \mapsto \mu_t(E)$  из-

мерима по Борелю для всякого борелевского множества  $E$  в  $\mathbb{R}^d$ , конечны интегралы

$$\int_0^T \int_K |a^{ij}(x, s)| + |b^i(x, s)| \mu_s(dx) ds$$

для компактов  $K \subset \mathbb{R}^d$  и для каждой функции  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  выполнено тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\nu = \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^d} L\varphi d\mu_s ds.$$

Требуемое при этом условие локальной интегрируемости коэффициентов относительно решения автоматически выполнено в случае локально ограниченных коэффициентов. Решением называют также меру  $\mu = \mu_t(dx)dt$ , которая определяется равенством

$$\int_{\mathbb{R}^d \times [\tau, T]} f d\mu = \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \mu_t(dx) dt.$$

Указанное условие на коэффициенты есть локальная интегрируемость относительно  $\mu$ .

Пусть  $y \in \mathbb{R}^d$  и  $(\mu_t^y)_{t \in [\tau, T]}$  – семейство борелевских вероятностных мер на  $\mathbb{R}^d$ , удовлетворяющее уравнению (1) с начальным условием  $\mu_\tau = \delta_y$  – мерой Дирака в точке  $y$ . В работе Колмогорова [1] было показано, что в случае достаточно регулярных коэффициентов они могут быть вычислены по таким решениям посредством формул

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^d} (x_i - y_i) \mu_{\tau+h}^y(dx) = b^i(y, \tau), \quad (2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}^d} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \mu_{\tau+h}^y(dx) = a^{ij}(y, \tau). \quad (3)$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

<sup>3</sup> Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия

\*E-mail: vibogach@mail.ru

\*\*E-mail: starticle@mail.ru

Естественно возникает вопрос о возможности восстановления коэффициентов по решениям в общем случае. В недавней работе [2] показано, что если коэффициенты непрерывны, удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} |a^{ij}(x,t)| &\leq C(1+|x|^2), \\ |b^i(x,t)| &\leq C(1+|x|), \end{aligned}$$

с некоторой постоянной  $C$  (при этих оценках интегралы от  $|x|^2$  по мерам  $\mu_t$  ограничены на отрезках), то указанные А.Н. Колмогоровым равенства справедливы.

Если коэффициенты  $a^{ij}$ ,  $b^i$  не имеют непрерывных версий, то эти равенства нуждаются в уточнении, так как поточечно они могут не выполняться просто из-за того, что изменение коэффициентов на множестве нулевой  $\mu_t dt$ -меры не меняет уравнение. Кроме того, интересно получить аналоги этих равенств в случае, когда начальное условие не является дельта-мерой. Ниже в теореме 2 представлен результат такого рода. Он дает широкие достаточные условия восстановления коэффициентов по решению, покрывающие случай непрерывных коэффициентов и дираковских начальных распределений, а также случай разрывных коэффициентов и начального распределения, заданного плотностью с некоторыми свойствами. Доказательства будут опубликованы в подробной статье.

**Определение 1.** Будем говорить, что борелевская функция  $f$  на  $\mathbb{R}^d \times [\tau, T]$  аппроксимируема относительно семейства вероятностных мер  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ , если существует такая последовательность ограниченных борелевских функций  $f_n$  на  $\mathbb{R}^d \times [\tau, T]$ , что эти функции непрерывны по  $x$ , выполнено равенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \rightarrow \tau} \sup_{x \in U} |f_n(x,t) - f_n(x,\tau)| = 0 \quad (4)$$

для каждого шара  $U$ , а также выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{esssup}_{s \in [\tau, T]} \|f(\cdot, s) - f_n(\cdot, s)\|_{L^1(\mu_s)} = 0. \quad (5)$$

В силу этого определения для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что для всех  $m, n \geq N$  и почти всех  $s \in [\tau, T]$  справедлива оценка

$$\|f_m(\cdot, s) - f_n(\cdot, s)\|_{L^1(\mu_s)} \leq \varepsilon.$$

Поэтому найдется такое множество  $S \subset [\tau, T]$  с дополнением меры нуль, что при всех  $s \in S$  последовательность  $f_n(\cdot, s)$  сходится в  $L^1(\mu_s)$  к некоторому пределу  $\tilde{f}(\cdot, s)$ . Нетрудно проверить, что сходимость имеет место и при  $s = \tau$ , так что можно считать, что  $\tau \in S$  и поэтому есть функция  $\tilde{f}(\cdot, \tau)$ , которая будет играть важную роль в теореме 2.

Новая функция  $\tilde{f}$  является версией исходной в том смысле, что  $\tilde{f}(x, s) = f(x, s)$  почти всюду относительно меры  $\mu$  на  $\mathbb{R}^d \times [\tau, T]$ . Это свойство, конечно, зависит от меры  $\mu$ , но если известно, что всякое вероятностное решение данного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова обладает почти всюду положительной плотностью относительно меры Лебега на  $\mathbb{R}^d \times [\tau, T]$ , то построенная версия универсальна для всех мер с плотностями. Известны различные достаточные условия положительности плотностей всех вероятностных решений, в частности, достаточно, чтобы матрица диффузии была локально липшицева и обратима, а коэффициент сноса был локально ограничен (см. [3, гл. 8]).

Ясно, что всякая непрерывная и ограниченная функция  $f$  на  $[\tau, T] \times \mathbb{R}^d$  аппроксимируема относительно  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ , причем можно считать, что  $\tilde{f} = f$ .

Приведем достаточное условие аппроксимируемости функции  $f$  относительно семейства  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ , выполненное без предположения о ее непрерывности.

**Теорема 1.** Предположим, что для почти всех  $t \in [\tau, T]$  мера  $\mu_t$  имеет плотность  $\rho(\cdot, t)$  относительно меры Лебега, причем на всяком шаре  $U$  функции  $\rho(\cdot, t)$  равномерно интегрируемы (например, равномерно ограничены в  $L^p(U)$ , где  $p > 1$ ). Пусть локально ограниченная измеримая функция  $f$  удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \in [\tau, T]} \int_{|x| \geq R} |f(x, t)| \mu_t(dx) = 0, \quad (6)$$

для каждого шара  $U$  множество функций  $x \mapsto f(x, t)$  имеет компактное замыкание в  $L^1(U)$  и

$$\limsup_{t \rightarrow \tau} \sup_{x \in U} |f(x, t) - f(x, \tau)| = 0. \quad (7)$$

Тогда функция  $f$  аппроксимируема относительно семейства  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ .

**Пример 1.** (i) Всякая ограниченная измеримая функция  $f$ , не зависящая от  $t$ , аппроксимируема относительно семейства мер  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ , непрерывного по  $t$  в слабой топологии и удовлетворяющего указанному в предложении условию на плотность  $\rho$ . Действительно, условие предкомпактности и (7) тривиально выполнены, а для проверки (6) достаточно заметить, что данное семейство мер равномерно плотно по теореме Прохорова, поскольку оно компактно в слабой топологии в силу непрерывности  $\mu_t$  по  $t$ .

(ii) Всякая непрерывная функция  $f$ , не зависящая от  $t$ , аппроксимируема относительно всякого семейства мер  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ , относительно которого она равномерно интегрируема. Здесь в качестве  $g_n$  можно брать срезки  $\psi_n(f)$ , где  $\psi_n(u) = u$  при  $|u| \leq n$ ,  $\psi_n(u) = n$  при  $u > n$ ,  $\psi_n(u) = -n$  при  $u < -n$ . Например, это верно, если функция  $f$  непрерывна, удовлетворяет оценке  $|f(x)| \leq C + C|x|^k$  и меры  $\mu_t$  обладают равномерно ограниченными моментами некоторого порядка  $m > k$ .

(iii) Более общим образом, непрерывная на  $\mathbb{R}^d \times [\tau, T]$  функция  $f$  аппроксимируема относительно семейства мер  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ , если функции  $f(\cdot, t)$  равномерно интегрируемы относительно мер  $\mu_t$ . Например, это верно при тех же оценке  $|f(x, t)| \leq C + C|x|^k$  и условии равномерной ограниченности моментов меры  $\mu_t$  порядка  $m > k$ . В частности, если  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$  – решение задачи (1), где  $|a^{ij}(x, t)| \leq C(1 + |x|^2)$ ,  $|b^i(x, t)| \leq C(1 + |x|)$  и начальное условие имеет второй момент, то непрерывная функция  $f$  с оценкой  $|f(x, t)| \leq C_1(1 + |x|^2)$ , аппроксимируема относительно  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ .

При применении к решениям задачи (1) указанное условие на плотности исключает сингулярные начальные распределения в момент  $\tau$ , но известно, что оно выполнено, если матрицы  $A(x, t)^{-1}$  равномерно ограничены, матрицы  $A(x, t)$  равномерно липшицевы по  $x$ , а плотность  $\rho(\cdot, \tau)$  локально ограничена (см. [3, §7.3]).

Приведем основной результат о восстановлении коэффициентов  $A$  и  $b$  по вероятностному решению  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$  уравнения (1) при следующем условии:

$$\frac{a^{ij}(x, t)}{|x| + 1}, b^i(x, t) \text{ интегрируемы в мере } \mu = \mu_t(dx)dt. \quad (8)$$

В формулировке используется некоторое семейство мер  $\mu_t^y$ , порожденное решением задачи (1) с начальным распределением  $\mu_\tau$  и дающее решения задачи (1) с дираковскими начальными распределениями  $\delta_y$ . Это семейство строится следующим образом. Согласно известному принципу суперпозиции (см. [6], [7], [8]), при условии (8) существует такая борелевская вероятностная мера  $P$  на пространстве непрерывных траекторий  $\Omega := C([\tau, T], \mathbb{R}^d)$  с его обычной суп-нормой, что

$$\mu_t = P \circ e_t^{-1}, \text{ где } e_t(\omega) = \omega(t),$$

и для всякой функции  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  отображение

$$(\omega, t) \mapsto \varphi(\omega(t)) - \varphi(\omega(\tau)) - \int_\tau^t L\varphi(\omega(s), s) ds$$

является мартингалом относительно  $P$  и фильтрации  $\mathcal{F}_t$ , порожденной отображениями  $e_s$ ,  $\tau \leq s \leq t$ . Такая мера  $P$  называется решением мартингальной задачи (см. [4], [5]). Пусть  $P^y$  – условные меры, получающиеся при дезинтегрировании меры  $P$  относительно меры  $\mu_\tau$ . Это означает, что мера  $P$  записывается в виде  $P(d\omega) = P^y(d\omega)\mu_\tau(dy)$ , т.е. для всякого борелевского множества  $B \subset \Omega$  выполнено равенство

$$P(B) = \int_{\mathbb{R}^d} P^y(B)\mu_\tau(dy),$$

где каждая мера  $P^y$  сосредоточена на множестве  $e_\tau^{-1}(y)$  и борелевски зависит от  $y$ . Непосредственно проверяется, что для  $\mu_\tau$ -почти всякого  $y$  семейство мер  $\mu_t^y = P^y \circ e_t^{-1}$  является решением уравнения (1) с начальным условием  $\mu_\tau^y = \delta_y$ .

Отметим, что решения  $\mu_t^y$  не обязаны существовать при всех  $y$ . Кроме того, не предполагается единственность решения задачи Коши. В случае неединственности важно использовать именно указанные решения, порожденные решением мартингальной задачи (его единственность также не предполагается).

**Теорема 2.** *Предположим, что*

$$\sup_{t \in [\tau, T]} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mu_t(dx) < \infty$$

*и коэффициенты  $b^i$  аппроксимируемы относительно семейства  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ . Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^d} (x^i - y^i) \mu_{\tau+h}^y(dx) - \tilde{b}^i(y, \tau) \right| \mu_\tau(dy) = 0.$$

Если, более того, функции  $a^{ij}$  интегрируемы относительно меры  $\mu$  и функции  $x_j b^i$  аппроксимируемы относительно семейства  $(\mu_t)_{t \in [\tau, T]}$ , причем при некотором  $p > 2$  интегралы от  $|x|^p$  по мерам  $\mu_t$  равномерно ограничены и  $\sup_t \|b(\cdot, t)\|_{L^2(\mu_t)} < \infty$ , то верно равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}^d} (x^i - y^i)(x^j - y^j) \mu_{\tau+h}^y(dx) - \tilde{a}^{ij}(y, \tau) \right| \mu_\tau(dy) = 0.$$

Таким образом, равенства (2) и (3) выполнены в смысле сходимости в  $L^1(\mu_\tau)$ .

Статья поддержана проектом 23-Ш05-16 в рамках Междисциплинарных научно-образовательных школ Московского университета.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kolmogoroff A. // Math. Ann. 1931. В. 104. S. 415–458; русский пер.: Колмогоров А.Н. // Успехи матем. наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.
2. Богачев В.И., Рёкнер М., Шапошников С.В. // Теория вероятн. и ее примен. 2023. Т. 68. № 3. С. 420–455.
3. Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V. Fokker–Planck–Kolmogorov equations, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.
4. Stroock D.W., Varadhan S.R.S. Multidimensional diffusion processes. Springer-Verlag, Berlin – New York, 1979.
5. Rogers L.C.G., Williams D. Diffusions, Markov processes, and martingales. V. 2. Itô calculus. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
6. Figalli A. // J. Funct. Anal. 2008. V. 254. N 1. P. 109–153.
7. Trevisan D. // Electron. J. Probab. 2016. V. 21, Paper No. 22, 41 pp.
8. Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V. // J. Dynam. Differ. Equat. 2021. V. 33. N 2. P. 715–739.

## ON RECONSTRUCTION OF KOLMOGOROV OPERATORS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Corresponding Member of the RAS V. I. Bogachev<sup>a, b, c, \*</sup>, S. V. Shaposhnikov<sup>a, b, \*\*</sup>

<sup>a</sup>Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia

<sup>b</sup>National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

<sup>c</sup>Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russia

We obtain broad sufficient conditions for reconstructing the coefficients of a Kolmogorov operator by means of a solution to the Cauchy problem for the corresponding Fokker–Planck–Kolmogorov equation.

*Keywords:* Kolmogorov operator, Fokker–Planck–Kolmogorov equation, martingale problem

УДК 517.984, 517.518.82

## ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА С РАВНОМЕРНОЙ НОРМОЙ

© 2024 г. Д. Д. Казимиров<sup>1,\*</sup>, И. А. Шейпак<sup>1,\*\*</sup>,

Представлено академиком РАН Б. С. Кашиным

Поступило 21.11.2023 г.

После доработки 11.01.2024 г.

Принято к публикации 09.02.2024 г.

Для функций, принадлежащих пространству Соболева  $\dot{W}_\infty^n[0;1]$ , и произвольной точки  $a \in (0;1)$  получены наилучшие оценки в неравенстве  $|f(a)| \leq A_{n,0,\infty}(a) \cdot \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0;1]}$ . Установлена связь этих оценок с наилучшими приближениями сплайнов специального вида многочленами в  $L_1[0;1]$  и с ядром Пеано. Найдены точные константы вложения пространства  $\dot{W}_\infty^n[0;1]$  в  $L_\infty[0;1]$ .

*Ключевые слова:* оценки производных, пространства Соболева, теоремы вложения, аппроксимация многочленами, ядро Пеано

DOI: 10.31857/S2686954324020022, EDN: XJEWHK

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим пространство Соболева  $\dot{W}_p^n[0;1]$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), состоящее из вещественнозначных функций  $f$ , обладающих абсолютно непрерывными производными до порядка  $n - 1$  включительно, таких, что  $f^{(n)} \in L_p[0;1]$ , и удовлетворяющих краевым условиям

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Пространство  $\dot{W}_p^n[0;1]$  снабжено естественной нормой

$$\|f\| := \|f^{(n)}\|_{L_p[0;1]}.$$

Для каждого  $a \in (0;1)$  и  $k = \overline{0, n - 1}$  поставим целью изучить величины  $A_{n,k,p}(a)$ , являющиеся наименьшими возможными в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leq A_{n,k,p}(a) \|f^{(n)}\|_{L_p[0;1]}.$$

Далее нас интересует глобальный максимум функции  $A_{n,k,p}$  на отрезке  $[0;1]$ :

$$\Lambda_{n,k,p} := \max_{a \in (0;1)} A_{n,k,p}(a),$$

при этом очевидно, что  $A_{n,k,p}(0) = A_{n,k,p}(1) = 0$ .

Число  $\Lambda_{n,k,p}$  является точной константой вложения пространства  $\dot{W}_p^n[0;1]$  в пространство  $\dot{W}_\infty^k[0;1]$ ,  $k = \overline{0, n - 1}$ :

$$\Lambda_{n,k,p} = \sup \left\{ \|f^{(k)}\|_{L_\infty[0;1]} : \|f^{(n)}\|_{L_p[0;1]} = 1 \right\}.$$

В работе [1] было показано, что функции  $A_{n,k,2}$  обладают следующим свойством: при четных  $k$  глобальный максимум находится в середине отрезка, а при нечетных  $k$  середина отрезка является локальным минимумом. Глобальный максимум  $A_{n,k,2}$  при нечетных  $k$  находится в точке локального максимума, ближайшего к середине отрезка. Также были явно вычислены константы  $\Lambda_{n,k,2}$  при всех четных  $k$ , в то время как случай нечетных  $k$  оказался сложнее.

В работе [2] получено явное описание функций  $A_{n,k,2}$  в терминах гипергеометрических функций типа  ${}_3F_2$ . В работе [4] изучались функции  $A_{n,n-1,\infty}$  и было показано, что они обладают таким же свойством, что и  $A_{n,k,2}$ : при четных  $k = n - 1$  глобальный максимум находится в се-

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

\*E-mail: danil.kazimirov@math.msu.ru

\*\*E-mail: iashep@yandex.ru

редине отрезка, а при нечетных  $k = n - 1$  середина отрезка является локальным минимумом. Глобальный максимум  $A_{n,n-1,\infty}$  при нечетных  $k = n - 1$  находится в точке локального максимума, ближайшего к середине отрезка. Также в [4] были вычислены константы вложения  $\Lambda_{n,n-1,\infty}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Укажем основные цели данной работы: 1) изучить свойства функций  $A_{n,0,\infty}$ , показать их связь с задачей о наилучшем полиномиальном приближении в  $L_1[0;1]$ , а также найти их представление через ядро Пеано; 2) получить формулы для  $\Lambda_{n,0,\infty}$ . Основным результатом работы содержится в следующем утверждении.

**Теорема.**

$$\Lambda_{n,0,\infty} = \frac{n+1}{\pi 2^{n-2} (2n+1)!!} \left[ 1, \frac{1}{2n+2}, \frac{3}{2n+2}, \dots, \frac{2n+1}{2n+2}; (-1)^{n+1} \right].$$

$$g_{n,k}(x,a) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(2n-k-1)!} (1-a)^{n-k} x^n h_{n,k}(1-x, 1-a), & x \in [0;a], \\ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-k-1)!} a^{n-k} (1-x)^n h_{n,k}(x,a), & x \in [a;1], \end{cases} \quad (1)$$

где

$$h_{n,k}(x,a) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} C_{2n-1-k}^{n-1-l} x^{n-1-l} a^l \sum_{m=0}^l C_{n-1+m}^m x^m.$$

Т.е.

$$f^{(k)}(a) = \int_0^1 f^{(n)}(x) g_{n,k}^{(n)}(x,a) dx.$$

Обозначим через  $\mathcal{P}_m$  пространство вещественных многочленов степени не выше  $m$ :

$$\mathcal{P}_m = \left\{ \sum_{j=0}^m c_j x^j, \quad x, c_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq m \right\}.$$

В работе [3, теорема 2] получен следующий результат. При  $1 \leq p \leq \infty$  справедливо равенство

$$A_{n,k,p}(a) = \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|g_{n,k}^{(n)} - u\|_{L_{p'}[0;1]}, \quad (2)$$

где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

Символ  ${}_p F_q$  обозначает гипергеометрическую функцию типа  $(p, q)$ .

Структура работы следующая. В § 2 устанавливается связь задачи о нахождении  $A_{n,k,p}$  с наилучшим приближением определенных сплайнов многочленами в  $L_{p'}[0;1]$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ). В § 3 вводятся специальные классы функций и показывается связь задачи об их наилучшем приближении многочленами в  $L_1[0;1]$  с ядром Пеано. В § 4 выводится окончательная формула для констант вложения  $\Lambda_{n,0,\infty}$  в терминах гипергеометрических функций. Характер асимптотического поведения  $\Lambda_{n,0,\infty}$  при  $n \rightarrow \infty$  установлен в § 5.

## 2. СВЯЗЬ $A_{n,k,\infty}$ С $L_1$ -АППРОКСИМАЦИЯМИ

Рассмотрим в  $\mathcal{W}_2^n[0;1]$  функционал  $f \mapsto f^{(k)}(a)$ . В соответствии с теоремой Рисса он задан единственной функцией  $g_{n,k}(x,a)$ , которая (см. [5]) имеет вид

Таким образом, описание  $A_{n,k,\infty}$  сводится к наилучшему приближению многочленами сплайна  $g_{n,k}^{(n)}$  в  $L_1[0;1]$ . Аппроксимациям в  $L_1[0;1]$ , в том числе и многочленами, посвящено много работ, перечислить все не представляется возможным. Упомянем лишь монографию [6]. Определим следующие функции:

$$G_{n,k,1}(x,a) := g_{n,k}^{(n)} \Big|_{[0;a]},$$

$$G_{n,k,2}(x,a) := g_{n,k}^{(n)} \Big|_{[a;1]}.$$

Эти функции суть многочлены степени не выше  $n - 1$ , при этом

$$G_{n,k,1}(x,a) - G_{n,k,2}(x,a) = \frac{(-1)^{n-k-1} (x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \chi_{[0;a]}.$$

Здесь  $\chi_{[0;a]}$  – характеристическая функция отрезка  $[0;a]$ .

Следовательно, вычисление  $A_{n,0,\infty}(a)$  равносильно нахождению при каждом  $a \in (0;1)$  для сплайна  $\frac{(-1)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_{[0;a]}$  наилучшего приближения в  $L_1[0;1]$  многочленами степени не выше  $n-1$ , т.е. справедлива

**Теорема 1.**

$$A_{n,0,\infty}(a) = \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\| \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_{[0;a]} - u \right\|_{L_1[0;1]}.$$

**3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ЯДРО ПЕАНО**

1) Для натуральных  $n$  рассмотрим многочлены Чебышёва второго рода

$$U_n(x) := \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad x = \cos \theta, \quad x \in [-1;1].$$

Корни многочлена  $U_n(x)$ , перенесенного на отрезок  $[0;1]$  (т.е. многочлена  $U_n(2x-1)$ ), имеют вид

$$a_j := a_{j,n} = \sin^2 \frac{\pi j}{2(n+1)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Для функции  $f \in L_1[0;1]$  через  $u_f$  обозначим многочлен, который интерполирует  $f$  в точках  $\{a_j\}_{j=1}^n$ . Через  $M_n$  обозначим множество всех таких функций  $f \in L_1[0;1]$ , для которых  $(f - u_f)(-1)^n \operatorname{sgn}(U_n(2x-1))$  не меняет знак на отрезке  $[0;1]$ .

2) Через  $F_n$  (соответственно  $F_n^+$ ) будем обозначать множество функций  $f \in L_1[0;1]$ , представимых в виде

$$f(x) = u(x) + \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} dg(s),$$

где  $g$  – функция ограниченной вариации (соответственно неубывающая),  $u \in \mathcal{P}_{n-1}$ .

Известно ([7, (2.10)]), что  $F_n^+ \subset M_n$ .

**Лемма 1.** Сплайн  $\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_{[0;a]} \in F_n^+$ .

**Доказательство.** В качестве  $u$  возьмем тождественно нулевой многочлен, и положим  $g(s) = \chi_{(t,1]}(s)$ ,  $t \in [0;1]$ .  $\square$

3) В теории приближений при оценках погрешности приближения используют ядро Пеано. В [7] при изучении наилучших  $L_1$ -аппроксимаций

алгебраическими многочленами исследованы свойства ядра  $V_n$  на отрезке  $[-1;1]$ , где

$$V_n(t) := \frac{1}{(n-1)!} \int_{-1}^t (t-x)^{n-1} (-1)^n \operatorname{sgn} U_n(x) dx.$$

Основные свойства этой функции следующие ([7, теорема 1])

1.  $V_n(t)$  – четная функция.
2.  $V_n(t)$  положительна на  $(-1;1)$  и строго возрастает на  $[-1;0]$ .

Также в [7, теорема 4] получено интегральное представление

$$V_n(t) = \frac{2\sqrt{2}(n+1)}{\pi n!} \left( \frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1/2} \times \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^n}{1 - (t+ix\sqrt{1-t^2})^{2(n+1)}} dx.$$

Для функции  $f \in L_1[-1;1]$  обозначим

$$E_{n-1}(f) := \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - u\|_{L_1[-1;1]}.$$

В [7] для различных классов функций в  $L_1[-1;1]$  с помощью  $V_n$  получены оценки для  $E_{n-1}$ . В частности ([7, теорема 2]), показано, что для  $f \in M_n \cap F_n$  справедливо равенство

$$E_{n-1}(f) = \left| \int_{-1}^1 V_n(s) dg(s) \right|.$$

Из леммы 1 и теоремы 1, с учетом замены переменных  $t = 2a - 1$ ,  $a \in [0;1]$ , получаем следующий результат.

**Теорема 2.**

$$A_{n,0,\infty}(a) = \frac{V_n(2a-1)}{2^n}, \quad a \in [0;1].$$

Из свойств функции  $V_n(t)$  получаем

**Теорема 3.**

$$\Lambda_{n,0,\infty} = A_{n,0,\infty}(1/2) = \frac{V_n(0)}{2^n} = \frac{n+1}{\pi n! 2^{2(n-1)}} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{1 + (-1)^n x^{2(n+1)}} dx.$$

**4. ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИНТЕГРАЛЕ**

Интеграл в теореме 3 существует для любого  $n \in \mathbb{N}$ , однако авторам не удалось найти в спра-

вочниках его значение в общем виде при всех  $n$ . Для натуральных  $p, q, r$  в предположении, что  $l := \frac{r}{p}$  есть натуральное число, рассмотрим более общий интеграл

$$I(p, q, r, z) := \int_0^1 \frac{(1-x^p)^q}{1+zx^r} dx, \quad |z| < 1.$$

**Теорема 4.** Пусть  $p, q, r, l = \frac{r}{p}$  – натуральные числа. Справедливо представление через гипергеометрическую функцию типа  $(l+1, l)$ :

$$I(p, q, r, z) = \frac{1}{p} B(1/p, q+1) \cdot {}_{l+1}F_l \left[ \begin{matrix} 1, b, b + \frac{1}{l} \dots b + \frac{l-1}{l} \\ c, c + \frac{1}{l}, \dots, c + \frac{l-1}{l} \end{matrix}; -z \right],$$

где  $b = \frac{1}{pl}$ ,  $c = \frac{1+pq+p}{pl}$ .

**Доказательство.** Используя разложение

$$\frac{1}{1+zx^r} = \sum_{j=0}^{\infty} (-z)^j x^{rj}$$

и замену переменных  $t := x^p$ , получим

$$I(p, q, r, z) := \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{\infty} (-z)^j B \left( lj + \frac{1}{p}, q+1 \right) = \frac{\Gamma(q+1)}{p} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j! \Gamma(lj + 1/p)}{\Gamma(lj + 1/p + q + 1)} \frac{(-z)^j}{j!}.$$

В сумме найдем отношение коэффициентов при последовательных степенях  $(-z)$ :

$$\frac{c_{j+1}}{c_j} = \frac{\Gamma(lj + 1/p + l) \Gamma(lj + 1/p + q + 1)}{\Gamma(lj + 1/p + q + l + 1) \Gamma(lj + 1/p)}.$$

Последнюю дробь можно записать в виде

$$\frac{c_{j+1}}{c_j} = \frac{\left( \frac{1}{pl} + j \right) \left( \frac{1}{pl} + \frac{1}{l} + j \right) \dots \left( \frac{1}{pl} + \frac{l-1}{l} + j \right) (1+j)}{\left( \frac{1+pq+p}{pl} + j \right) \left( \frac{1+pq+2p}{pl} + j \right) \dots \left( \frac{1+pq+lp}{pl} + j \right) (1+j)},$$

что соответствует гипергеометрической функции

$${}_{l+1}F_l \left[ \begin{matrix} 1, b, b + \frac{1}{l} \dots b + \frac{l-1}{l} \\ c, c + \frac{1}{l}, \dots, c + \frac{l-1}{l} \end{matrix}; -z \right],$$

где  $b = \frac{1}{pl}$ ,  $c = \frac{1+pq+p}{pl}$ . Учитывая, что

$c_0 = \frac{1}{p} B(1/p, q+1)$ , получаем

$$I(p, q, r, z) = \frac{1}{p} B(1/p, q+1) \cdot {}_{l+1}F_l \left[ \begin{matrix} 1, b, b + \frac{1}{l} \dots b + \frac{l-1}{l} \\ c, c + \frac{1}{l}, \dots, c + \frac{l-1}{l} \end{matrix}; -z \right].$$

**Замечание 1.** При условии натуральности чисел  $p, q, r, s, l = \frac{r}{p}$  аналогичным способом можно вычислить более общий интеграл

$$I(p, q, r, s, z) := \int_0^1 (1-x^p)^q (1+zx^r)^{-s} dx.$$

Он равен

$$I(p, q, r, s, z) = \frac{1}{p} B(1/p, q+1) \cdot {}_{l+1}F_l \left[ \begin{matrix} s, b, b + \frac{1}{l} \dots b + \frac{l-1}{l} \\ c, c + \frac{1}{l}, \dots, c + \frac{l-1}{l} \end{matrix}; -z \right],$$

где  $b = \frac{1}{pl}$ ,  $c = \frac{1+pq+p}{pl}$ .

Для интеграла в представлении  $V_n$  имеем  $p = 2$ ,  $q = n$ ,  $r = 2n + 2$ , откуда  $l = n + 1$ .

**Замечание 2.** Теорема 4 доказана в предположении  $|z| < 1$ . Однако параметры получившегося гипергеометрического ряда обладают свойством

$$\sum_{j=0}^n \left( c + \frac{j}{n+1} - b - \frac{j}{n+1} \right) = n+1 > 0.$$

Поэтому по [8, теорема 2.1.2] ряд сходится абсолютно и для всех  $|z| = 1$ .

Итого,

$$\Lambda_{n,0,\infty} = \frac{n+1}{\pi n!} \frac{1}{2^{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{2} B(1/2, n+1).$$

$${}_{n+2}F_{n+1} \left[ \begin{matrix} 1, b, b + \frac{1}{n+1} \dots b + \frac{n}{n+1} \\ c, c + \frac{1}{n+1}, \dots, c + \frac{n}{n+1} \end{matrix}; (-1)^{n+1} \right],$$

где  $b = \frac{1}{2n+2}$ ,  $c = \frac{2n+3}{2n+2}$ .

Используя свойства бета-функции, получаем окончательную формулу для констант вложения

$$\Lambda_{n,0,\infty} = \frac{n+1}{\pi 2^{n-2} (2n+1)!!}$$

$${}_{n+2}F_{n+1} \left[ \begin{matrix} 1, \frac{1}{2n+2}, \frac{3}{2n+2} \dots \frac{2n+1}{2n+2} \\ \frac{2n+3}{2n+2}, \frac{2n+5}{2n+2}, \dots, \frac{4n+3}{2n+2} \end{matrix}; (-1)^{n+1} \right].$$

Приведем несколько начальных значений величин  $\Lambda_{n,0,\infty}$ :

$$\Lambda_{1,0,\infty} = 1/2, \quad \Lambda_{2,0,\infty} = 1/16,$$

$$\Lambda_{3,0,\infty} = (2 - \sqrt{2})/96, \quad \Lambda_{4,0,\infty} = (8 - 3\sqrt{5})/3072.$$

### 5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

$\Lambda_{n,0,\infty}$  ПРИ  $n \rightarrow \infty$

**Теорема 5.** *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{1+(-1)^n x^{2(n+1)}} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (3)$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** 1) Введем обозначения

$$f_n(x) := \frac{(1-x^2)^n}{1+(-1)^n x^{2(n+1)}},$$

$$g_n(x) := (1-x^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим функцию

$$h_n(x) := |f_n(x) - g_n(x)| = \frac{(1-x^2)^n x^{2n+2}}{1+(-1)^n x^{2(n+1)}}.$$

Для четных  $n$  на отрезке  $[0;1]$  справедлива оценка

$$h_n(x) \leq (1-x^2)^n x^{2n} \leq \frac{1}{2^{2n}}.$$

Для нечетных  $n$  на отрезке  $[0;1]$  справедлива оценка

$$h_n(x) = \frac{(1-x)^{n-1} (1+x)^n x^{2n+2}}{(1+x+\dots+x^n)(1+x^{n+1})} \leq \leq 2(1-x^2)^{n-1} x^{2n-2} \leq \frac{1}{2^{2n-3}}.$$

2) Справедливо следующее представление

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = \frac{\sqrt{\pi} n!}{(2n+1) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)},$$

где  $B, \Gamma$  – бета- и гамма- функции Эйлера, откуда получаем асимптотическое поведение

$$\int_0^1 g_n(x) dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из равномерной экспоненциальной близости функций  $f_n$  и  $g_n$  на отрезке  $[0;1]$  при  $n \rightarrow \infty$  следует утверждение теоремы.  $\square$

Из теорем 3 и 5 немедленно получаем

**Следствие 1.** *Для констант вложения  $\Lambda_{n,0,\infty}$  справедлива асимптотика*

$$\Lambda_{n,0,\infty} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi n!} 2^{2n-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Результаты получены при поддержке РФФ грант № 20-11-20261.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ. 2021. Т. 55. № 1. С. 43–55.
2. Гарманова Т.А. Оценки производных в пространствах Соболева в терминах гипергеометрических функций // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 500–507.
3. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Связь наилучших  $L_p$  приближений сплайнов многочленами с оценками значений промежуточных производных в пространствах Соболева // Математические заметки, (принята к печати).

4. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Точные оценки производных высокого порядка в пространствах Соболева // Вестник МГУ. Серия 1: Математика. Механика (принята к печати).
5. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Явный вид экстремалей в задаче о константах вложения в пространствах Соболева // Труды Московского математического общества. 2019. Т. 80. № 2. С. 221–246.
6. Pinkus A. On  $L_1$ -Approximation // Cambridge University Press. 2008. 252 p.
7. Fiedler H., Jurkat W.B. Best  $L_1$ -Approximation by Polynomials // Journal Of Approximation Theory, 1983. N 31. P. 269–292.
8. Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж. Специальные функции // Перевод с англ. под ред. Ю.А. Неретина. М.: МЦНМО, 2013. 652 с.

## EXACT ESTIMATES OF FUNCTIONS IN SOBOLEV SPACES WITH UNIFORM NORM

D. D. Kazimirov<sup>a, \*</sup>, I. A. Sheypak<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B. S. Kashin

For functions from the Sobolev space  $\mathring{W}_\infty^n[0;1]$  and an arbitrary point  $a \in (0;1)$ , the best estimates are obtained in the inequality  $|f(a)| \leq A_{n,0,\infty}(a) \cdot \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0;1]}$ . The connection of these estimates with the best approximations of splines of a special kind by polynomials in  $L_1[0;1]$  and with the Peano kernel is established. Exact constants of embedding the space  $\mathring{W}_\infty^n[0;1]$  in  $L_\infty[0;1]$  are found.

*Keywords:* estimates of derivatives, Sobolev spaces, embedding theorems, approximation by polynomials, Peano kernel

## О НЕРАЗРЕШИМОСТИ ТЕОРИЙ ПОДМНОЖЕСТВ НЕКОТОРЫХ УНАРОВ

© 2024 г. Б. Н. Карлов<sup>1, \*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 07.07.2023 г.

После доработки 08.02.2024 г.

Принято к публикации 14.02.2024 г.

В данной работе исследуются алгоритмические свойства унаров с разнозначной функцией. Мы доказываем, что теория любого такого унара допускает элиминацию кванторов при подходящем обогашении сигнатуры счётным множеством предикатных символов. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы элиминация кванторов была эффективной, и формулируется критерий разрешимости теорий таких унаров. С помощью полученного критерия приводится пример такого унара с разрешимой теорией, что теория унара его подмножеств неразрешима.

*Ключевые слова:* унар, теория, разрешимость, элиминация кванторов, алгебра подмножеств

DOI: 10.31857/S2686954324020035, EDN: XJBSFR

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений теории моделей является изучение различных операций над алгебраическими системами, таких как прямые и фильтрованные произведения, гомоморфизмы, построение факторсистем и т. п. Одним из классических результатов, полученных в этой области, является следующий: если теории нескольких алгебраических систем разрешимы, то теория их прямого произведения также разрешима (см. [1]). Элементами основного множества прямого произведения являются последовательности (конечные или бесконечные) элементов исходных систем, то есть упорядоченные множества элементов. Естественным аналогом прямого произведения является операция взятия всех или некоторых подмножеств основного множества исходной системы. В отличие от прямого произведения, такая операция строит неупорядоченные множества элементов. В частности, эта операция позволяет перейти от алгебры слов в некотором алфавите к алгебре языков. В работах [2, 3] были изучены булевы алгебры некоторых классов языков и было доказано, что булевы алгебры регулярных, контекстно-зависимых и рекурсивных языков изоморфны. В работах

[4, 5] были изучены другие варианты теории регулярных языков. Было доказано, что теория регулярных языков неразрешима, даже если алфавит содержит единственный символ, а сигнатура содержит либо только конкатенацию, либо объединение и итерацию. Также в [4] установлено, что теория конечных подмножеств натуральных чисел со сложением неразрешима. Известно, что теория натуральных чисел с операцией сложения (арифметика Пресбургера) разрешима, так что этот результат показывает, что алгебра подмножеств может быть алгоритмически существенно сложнее, чем исходная алгебра.

Простейшим типом алгебраических систем являются унары – алгебры вида  $\mathfrak{A} = (A, f)$ , где  $f$  – одноместная функция. Разрешимость элементарной теории унаров была доказана в [6, 7], а в [7] также получен критерий элементарной эквивалентности унаров. В работе [8] описаны все полные теории унаров, допускающие элиминацию кванторов. В этой же работе приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы теория унара  $\mathfrak{A}$  допускала элиминацию кванторов. Доказательства этих свойств унаров весьма нетривиальны. Так, элементарная классификация использует сложные формулы, описывающие структуру компонент унаров, а в доказательстве критерия элиминации кванторов используется понятие однородных моделей.

<sup>1</sup> Тверской государственный университет, Тверь, Россия

\* E-mail: bnkarlov@gmail.com

Однако в некоторых частных случаях существуют значительно более простые доказательства. Например, в работе [9] получена элементарная классификация унарных с разнзначной функцией. Критерий элементарной эквивалентности формулируется в ней в терминах количества компонент разного типа. Некоторые исследования унарных связаны с операцией построения алгебры подмножеств. В [10] приведён пример унара с неразрешимой теорией и такого, что теория унара всех его конечных подмножеств разрешима, а в [9, 11] изучены последовательности унарных с разнзначной функцией, получающиеся в результате многократного применения операции взятия подмножеств.

В настоящей работе мы продолжаем изучать алгоритмические свойства унарных с разнзначной функцией. Мы даём прямое доказательство того, что теория любого такого унара допускает элиминацию кванторов при обогащении сигнатуры одноместными предикатными символами  $D_i$ , означающими возможность  $i$ -кратного применения обратной функции. Кроме того, мы формулируем необходимые и достаточные условия для того, чтобы элиминация кванторов была эффективной. Как следствие, мы получаем критерий разрешимости теорий унарных такого вида. Нашим основным результатом является следующий: существует унар  $\mathfrak{A}$  с разнзначной функцией и такой, что теория унара  $\mathfrak{A}$  разрешима, но теории унарных всех его подмножеств и всех его конечных подмножеств неразрешимы.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $A$  – произвольное множество, и пусть  $f : A \rightarrow A$  – некоторая одноместная функция.  $f$  разнзначна, если из  $x \neq y$  следует  $f(x) \neq f(y)$ . Через  $f^i$  мы будем обозначать функцию, получающуюся композицией  $f$  с собой  $i$  раз, то есть

$$f^i(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{i \text{ раз}}.$$

В частности,  $f^0(x) = x$  для всех  $x$ , то есть  $f^0$  – тождественная функция.

Уноидом называется алгебраическая система  $\mathfrak{A} = (A, f_1, \dots, f_n)$ , где  $f_i$  – одноместные функции. Унар – это уноид  $\mathfrak{A} = (A, f)$ . Мы будем изучать унары, в которых функция  $f$  является разнзначной. Основное множество такого унара распадается на несколько классов (возможно, бесконечно много) одного из следующих видов:

1. конечные классы мощности  $n$ :

$$C = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad f(x_i) = x_{i+1}, \quad f(x_n) = x_1;$$

2. бесконечные классы типа целых чисел  $\mathbb{Z}$ :

$$C = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}, \quad f(x_i) = x_{i+1};$$

3. бесконечные классы типа натуральных чисел  $\omega$ :

$$C = \{x_0, x_1, x_2, \dots\},$$

$$f(x_i) = x_{i+1},$$

$$f(y) \neq x_0 \text{ ни для какого } y \in A.$$

В работе [9] было определено счётное семейство инвариантов, характеризующих унары с разнзначной функцией с точностью до элементарной эквивалентности. Через  $\omega$  мы обозначаем множество натуральных чисел (включая 0).

**Определение 1.** С унаром  $\mathfrak{A} = (A, f)$  связывается функция

$$\chi_{\mathfrak{A}} : \omega \cup \{\omega, \mathbb{Z}\} \rightarrow \omega \cup \{\infty\},$$

определяемая следующим образом:

1.  $\chi_{\mathfrak{A}}(n) = k$ , если  $\mathfrak{A}$  содержит конечное число  $k \geq 0$  классов мощности  $n$ , в противном случае  $\chi_{\mathfrak{A}}(n) = \infty$ ;

2.  $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) = k$ , если  $\mathfrak{A}$  содержит конечное число  $k \geq 0$  классов типа  $\omega$ , в противном случае  $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) = \infty$ ;

3.  $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 1$ , если для любого  $n \geq 0$  в унаре  $\mathfrak{A}$  имеется класс (конечный или бесконечный), содержащий более  $n$  элементов, в противном случае  $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 0$ .

Неформально говоря,  $\chi_{\mathfrak{A}}(n)$  и  $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega)$  – это количество классов мощности  $n$  и типа  $\omega$  соответственно. Символ  $\infty$  означает, что количество классов данного типа бесконечно, при этом различные бесконечные мощности не различаются. Значение  $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z})$  равно 1 тогда и только тогда, когда в  $\mathfrak{A}$  имеются классы, содержащие сколь угодно много элементов.

Для произвольного унара  $\mathfrak{A} = (A, f)$  через  $\text{exp } \mathfrak{A}$  обозначается унар, основным множеством которого является множество всех подмножеств множества  $A$ , а функция  $f$  определяется как результат поэлементного применения  $f : f(B) = \{f(x) : x \in B\}$ . Через  $\text{exp}_{\text{fin}} \mathfrak{A}$  обозначается аналогичный унар, но содержащий только конечные подмножества множества  $A$ .

Теория  $T$  — это множество формул первого порядка, замкнутое относительно логического следования. Формулы  $\varphi$  и  $\psi$  эквивалентны в теории  $T$ , если  $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in T$ . Эквивалентность формул обозначается  $\varphi \equiv_T \psi$  или просто  $\varphi \equiv \psi$ , если теория ясна из контекста. Теория алгебраической системы  $\mathfrak{A}$  — это множество всех формул истинных в  $\mathfrak{A}$ . Теория  $T$  допускает элиминацию кванторов, если для любой формулы  $\varphi$  существует бескванторная формула  $\psi$  такая, что  $\varphi \equiv_T \psi$ . Теория  $T$  допускает эффективную элиминацию кванторов, если существует алгоритм, который по произвольной формуле  $\varphi$  строит эквивалентную ей в теории  $T$  бескванторную формулу  $\psi$ .

### 3. ЭЛИМИНАЦИЯ КВАНТОРОВ В ТЕОРИИ УНАРА С РАЗНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Мы обогатим сигнатуру унара  $\mathfrak{A}$  счётным множеством одноместных предикатов  $D_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), которые определяются следующим образом:

$$D_i(x) \equiv (\exists y)x = f^i(y).$$

Таким образом, предикат  $D_i(x)$  говорит, что из элемента  $x$  можно сделать по меньшей мере  $i$  шагов в направлении “против” функции  $f$ .

Введём специальное отношение  $R_{\mathfrak{A}}$ , описывающее строение унара  $\mathfrak{A}$ . Это отношение

подсчитывает количество классов разных мощностей, но делает это менее точно, чем функция  $\chi_{\mathfrak{A}}$ .

**Определение 2.** Пусть  $\mathfrak{A} = (A, f)$  — унар, в котором функция  $f$  разнозначна. Через  $R_{\mathfrak{A}}$  обозначается следующее отношение на множестве натуральных чисел:

$$R_{\mathfrak{A}} = \{(n, k) : \chi_{\mathfrak{A}}(n) \geq k\}.$$

Мы считаем, что  $\infty > n$  для любого  $n \in \omega$ .

Теперь мы приведём наш первый результат — возможность элиминации кванторов в теории унара  $\mathfrak{A}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{A} = (A, f)$  — унар, в котором функция  $f$  разнозначна. Тогда:

1. теория унара  $\mathfrak{A}$  допускает элиминацию кванторов в сигнатуре  $\{f, D_i : i \in \omega\}$ ;
2. теория унара  $\mathfrak{A}$  допускает эффективную элиминацию кванторов в сигнатуре  $\{f, D_i : i \in \omega\}$  тогда и только тогда, когда отношение  $R_{\mathfrak{A}}$  рекурсивно.

**Схема доказательства.** Чтобы доказать возможность элиминации кванторов, достаточно показать, как построить эквивалентную бескванторную формулу для формулы  $(\exists x)\psi$ , где  $\psi$  — конъюнкция атомных формул и их отрицаний (см. [12]). Рассмотрим формулу

$$\varphi = (\exists x) \left( \bigwedge_{i=1}^K f^{k_i}(x) = f^{k'_i}(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^L f^{l_i}(x) \neq f^{l'_i}(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^M f^{m_i}(x) = f^{m'_i}(y_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^P f^{p_i}(x) \neq f^{p'_i}(z_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^Q D_{q_i}(f^{q'_i}(x)) \wedge \bigwedge_{i=1}^R \neg D_{r_i}(f^{r'_i}(x)) \right),$$

где  $y_i$  и  $z_i$  — переменные отличные от  $x$ . Непосредственно проверяется, что при  $a > b$  формула  $D_a(f^b(x))$  эквивалентна  $D_{a-b}(x)$ , а в противном случае она истинна. Кроме того,  $D_a(x) \wedge D_b(x) \equiv D_{\max\{a,b\}}$ , поэтому конъюнкцию формул  $D_{q_i}(f^{q'_i}(x))$  можно заменить на одну формулу вида  $D_{q_i}(x)$ . Аналогично конъюнкцию формул  $\neg D_{r_i}(f^{r'_i}(x))$  можно заменить на одну формулу вида  $\neg D_{r_i}(x)$ . Так как функция  $f$  разнозначна, то формулы  $f^a(y) = f^b(z)$  и  $f^{a+c}(y) = f^{b+c}(z)$  эквивалентны для любых целых чисел  $a, b, c$ . Следовательно, можно добиться, чтобы в неравенствах  $f^{p_i}(x) \neq f^{p'_i}(z)$  все пока-

затели при  $f$  в левых частях были одинаковыми. Формула  $f^a(x) = f^b(x)$  эквивалентна формуле  $x = f^{|a-b|}(x)$ , а формула  $x = f^a(x) \wedge x = f^b(x)$  эквивалентна формуле  $x = f^{\gcd(a,b)}(x)$ , где через  $\gcd$  обозначен наибольший общий делитель. Следовательно, конъюнкцию формул  $f^{k_i}(x) = f^{k'_i}(x)$  можно заменить на одну формулу вида  $x = f^k(x)$ . Аналогично каждое неравенство  $f^{l_i}(x) \neq f^{l'_i}(x)$  эквивалентно неравенству  $x \neq f^{|l_i-l'_i|}(x)$ . Если в формуле есть хотя бы одно равенство вида  $f^m(x) = t$ , где терм  $t$  не содержит переменной  $x$ , то можно всюду

увеличить показатели при  $f$  по меньшей мере до  $m$ , используя свойства отношений  $D_q$  и  $D_r$ , а также эквивалентность формул  $f^a(y) = f^b(z)$  и  $f^{a+m}(y) = f^{b+m}(z)$ . После этого квантор эли-

минируется заменой  $f^m(x)$  на  $t$  и добавлением  $D_m(t)$  в качестве нового члена конъюнкции.

Таким образом, остаётся устранить квантор в формуле вида

$$\overline{(\exists x) \left( x = f^k(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^L x \neq f^{l_i''}(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^P f^N(x) \neq f^{p_i''}(z_i) \wedge D_q(x) \wedge \neg D_r(x) \right)}$$

где некоторые члены конъюнкции могут отсутствовать. Эта формула утверждает, что существует элемент  $x$  такой, что  $f^N(x)$  не совпадает с некоторыми фиксированными элементами  $f^{p_i''}(z_i)$ , при этом накладываются некоторые ограничения на классы, которым может принадлежать  $x$ . Формула  $x = f^k(x)$  утверждает, что  $x$  принадлежит конечному классу, мощность которого является делителем числа  $k$ . Каждая из формул  $x \neq f^{l_i''}(x)$  утверждает, что  $x$  принадлежит либо бесконечному классу, либо конечному классу, мощность которого не является делителем числа  $l_i''$ . Формула  $D_q(x)$  утверждает, что  $x$  либо принадлежит классу типа отличного от  $\omega$ , либо находится в классе типа  $\omega$  на расстоянии большем или равном  $q$  от его начального элемента. Аналогично формула  $\neg D_r(x)$  утверждает, что  $x$  находится в классе типа  $\omega$  на расстоянии менее  $r$  от начала.

Устранение квантора теперь выполняется по следующей схеме: выделить среди элементов  $f^{p_i''}(z_i)$  те, которые могут попасть в те же классы, что и  $f^N(x)$ , и перебрать все “существенно разные” варианты их расположения в этих классах. Если  $x$  должен находиться в конечном классе одной из мощностей  $n_1, \dots, n_h$  и суммарный размер таких классов больше  $P$ , то  $x$  заведомо существует. Если же их суммарный размер не превосходит  $P$ , то существует лишь конечно много вариантов расположения  $f^{p_i''}(z_i)$  внутри этих классов, поэтому их можно просто перебрать. Если  $x$  должен находиться в классе типа  $\omega$ , то квантор устраняется аналогично. Если число классов типа  $\omega$  больше  $P$  или для  $x$  не задана верхняя граница расстояния до первого элемента класса, то  $x$  всегда существует. Если же число классов типа  $\omega$  не превосходит  $P$  и расстояние от  $x$  до начала ограничено, то нужно написать конечную дизъюнкцию, которая говорит, что хотя бы один элемент на таком же расстоянии от начала, что и  $x$ , не совпадает ни с одним  $f^{p_i''}(z_i)$ . Наконец, формула может не накладывать ограничений на тип класса, которому

принадлежит  $x$ . В этом случае формула истинна, если количество различных элементов среди  $f^{p_i''}(z_i)$  меньше мощности основного множества. Но число разбиений конечного множества на подмножества равных элементов конечно, поэтому все такие разбиения можно перебрать.

Если отношение  $R_{\mathfrak{A}}$  рекурсивно, то возможно алгоритмически описать вышеперечисленные варианты, поэтому элиминация кванторов оказывается эффективной. Если же  $R_{\mathfrak{A}}$  нерекурсивно, то эффективная элиминация невозможна, поскольку можно написать формулу, утверждающую, что  $\mathfrak{A}$  содержит не менее чем  $k$  классов мощности  $n$ .  $\square$

Из этой теоремы получается критерий разрешимости теории унара  $\mathfrak{A}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mathfrak{A} = (A, f)$  – унар, в котором функция  $f$  разнозначна. Теория унара  $\mathfrak{A}$  разрешима тогда и только тогда, когда отношение  $R_{\mathfrak{A}}$  рекурсивно.

#### 4. ПРИМЕР УНАРА С НЕРАЗРЕШИМОЙ ТЕОРИЕЙ ПОДМНОЖЕСТВ

Теорема 2 позволяет построить пример унара, теория которого алгоритмически проще теории унара его подмножеств. Сначала установим одно свойство рекурсивных множеств.

**Теорема 3.** Существует рекурсивное множество  $X$  такое, что множество простых делителей всех чисел из  $X$  нерекурсивно.

**Доказательство.** Для натурального числа  $x$  обозначим через  $M_x$  машину Тьюринга с номером  $x$ . Пусть SELF – множество номеров самоприменимых машин Тьюринга:

$$\text{SELF} = \{x \in \omega : M_x \text{ останавливается на своем входе } x\}.$$

Известно (см. [12]), что это множество нерекурсивно. Обозначим через  $p_i$   $i$ -е по счёту простое число:  $p_0 = 2, p_1 = 3, \dots$ . Множество  $X$  определяется следующим образом:

$$X = \left\{ p_i^j : M_i \text{ останавливается на своём номере ровно за } j \text{ шагов} \right\}.$$

Это множество рекурсивно. Действительно, чтобы проверить, принадлежит ли число  $n$  множеству  $X$ , сначала нужно узнать, является ли  $n$  степенью простого числа. Если нет, то  $n \notin X$ . Если же  $n = p_i^j$ , то нужно запустить машину Тьюринга  $M_i$  на входе  $i$  на  $j$  шагов и проверить, остановится ли она.

Обозначим через  $Y$  множество простых делителей всех чисел из множества  $X$ . Если машина Тьюринга  $M_i$  самоприменима, то  $p_i^j \in X$  для некоторого  $j > 0$ , а значит,  $p_i \in Y$ . Если же  $M_i$  не является самоприменимой, то  $p_i^j \notin X$  ни для какого  $j$ . Следовательно,  $p_i \notin Y$ , так как все элементы  $X$  являются степенями простых чисел и не могут делиться на  $p_i$ . Итак, мы доказали, что  $i \in \text{SELF}$  тогда и только тогда, когда  $p_i \in Y$ . Следовательно,  $Y$  не рекурсивно.  $\square$

Теперь мы можем доказать наш главный результат.

**Теорема 4.** *Существует унар  $\mathfrak{A} = (A, f)$ , в котором функция  $f$  взаимно однозначна, и такой, что теория унара  $\mathfrak{A}$  разрешима, а теории унаров  $\text{exp}\mathfrak{A}$  и  $\text{exp}_{\text{fin}}\mathfrak{A}$  неразрешимы.*

**Доказательство.** Пусть  $X$  — множество из теоремы 3. Определим унар  $\mathfrak{A}$  следующим образом:  $\mathfrak{A}$  содержит ровно один класс мощности  $n$  для любого  $n \in X$  и не содержит других классов. Пара  $(n, k)$  принадлежит  $R_{\mathfrak{A}}$  в одном из двух случаев: либо  $k = 0$ , либо  $n \in X$  и  $k = 1$ . Так как множество  $X$  рекурсивно, то отношение  $R_{\mathfrak{A}}$  также рекурсивно, а значит, по теореме 2 теория унара  $\mathfrak{A}$  разрешима.

В [11] было показано, что мощности конечных классов унара  $\text{exp}_{\text{fin}}\mathfrak{A}$  исчерпываются делителями чисел вида  $\text{lcm}(n_1, \dots, n_h)$ , где  $n_i$  — мощности конечных классов унара  $\mathfrak{A}$ , причём для каждого такого делителя имеется хотя бы один класс соответствующей мощности. Поэтому унар  $\text{exp}_{\text{fin}}\mathfrak{A}$  содержит класс мощности  $p_i$  тогда и только тогда, когда  $p_i$  является делителем одного из элементов множества  $X$ . Бесконечные подмножества элементов унара  $\mathfrak{A}$  добавляют в унар  $\text{exp}\mathfrak{A}$  классы типа  $\mathbb{Z}$ , но количество и мощности конечных классов останутся такими же, что и в унаре  $\text{exp}_{\text{fin}}\mathfrak{A}$ . Следовательно, унары  $\text{exp}\mathfrak{A}$  и  $\text{exp}_{\text{fin}}\mathfrak{A}$  содержат класс мощности  $p_i$  тогда и только тогда, когда  $p_i \in Y$ , где  $Y$  — множество всех простых делителей элементов из  $X$ .

Так как  $Y$  не рекурсивно, то отношения  $R_{\text{exp}\mathfrak{A}}$  и  $R_{\text{exp}_{\text{fin}}\mathfrak{A}}$  также не рекурсивны. Значит, по теореме 2 теории унаров  $\text{exp}\mathfrak{A}$  и  $\text{exp}_{\text{fin}}\mathfrak{A}$  неразрешимы.  $\square$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы доказали, что существуют такие унары с разрешимой теорией, что теории унаров всех или только конечных подмножеств неразрешимы. В связи с этим возникают некоторые естественные вопросы.

1. Справедлив ли аналогичный результат для унаров со связным основным множеством? Ясно, что функция  $f$  в таком унаре не может быть разностной.

2. Как может меняться степень неразрешимости теории при переходе от унара к унару его подмножеств? В частности, если теория унара  $\mathfrak{A}$  принадлежит  $T$ -степени  $\mathbf{a}$ , то всегда ли теории унаров  $\text{exp}\mathfrak{A}$  и  $\text{exp}_{\text{fin}}\mathfrak{A}$  имеют степень неразрешимости не больше чем  $\mathbf{a}'$ , где  $\mathbf{a}'$  — скачок степени  $\mathbf{a}$ ?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mostowski A. On direct products of theories // Journal of Symbolic Logic. 1952. V. 17. N 3. P. 1–31. [https://doi.org/10.1016/S0049-237X\(09\)70257-5](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(09)70257-5)
2. Marini C., Simi G., Sorbi A., Sorrentino M. A note on algebras of languages // Theoretical Computer Science. 2011. V. 412. P. 6531–6536. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.08.022>
3. Коновалов А.С., Селиванов В.Л. Булевы алгебры регулярных языков // Алгебра и логика. 2013. Т. 52. № 6. С. 676–711.
4. Dudakov S.M. On undecidability of concatenation theory for one-symbol languages // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. N 2. P. 168–175. <https://doi.org/10.1134/S1995080220020055>
5. Dudakov S., Karlov B. On decidability of theories of regular languages // Theory of Computing Systems. 2021. V. 65. N 3. P. 462–478. <https://doi.org/10.1007/s00224-020-09995-4>
6. Ehrenfeucht A. Decidability of the theory of one function // Notices of the American Mathematical Society. 1959. V. 6. P. 268.
7. Иванов А.А. Полные теории унаров // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. № 1. С. 48–73.
8. Иванов А.А. О полных теориях унаров // Сибирский математический журнал. 1986. Т. 27. № 1. С. 57–69.

9. Карлов Б.Н. Об элементарной эквивалентности некоторых уноидов и уноидов их подмножеств // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. Т. 3. С. 18–32. <https://doi.org/10.26456/vtprmk620>
10. Дудаков С.М. Об алгоритмических свойствах алгебры конечных подмножеств некоторых уноидов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. Т. 4. С. 108–116. <https://doi.org/10.26456/vtprmk550>
11. Карлов Б.Н. О некоторых свойствах уноидов подмножеств // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13–15 декабря 2021 года. Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью “Вэлборн”, 2022. С. 1594–1600.
12. Monk J.D. Mathematical logic. New York: Springer, 1976. 542 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9452-5>

## ON UNDECIDABILITY OF SUBSET THEORIES OF SOME UNARS

**B. N. Karlov<sup>a,\*</sup>**

<sup>a</sup>*Tver State University, Tver, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

This paper is dedicated to studying of the algorithmic properties of unars with an injective function. We prove that the theory of every such unar admits quantifier elimination if the language is extended by a countable amount of predicate symbols. Necessary and sufficient conditions are established for the quantifier elimination to be effective, and a criterion of decidability of theories of such unars is formulated. Using this criterion we build a unar such that its theory is decidable, but the theory of the unar of its subsets is undecidable.

*Keywords:* unar, theory, decidability, quantifier elimination, subset algebra

УДК 519.175.4

## ИНДУЦИРОВАННЫЕ ЛЕСА И ДЕРЕВЬЯ В СЛУЧАЙНОМ ГРАФЕ ЭРДЁША–РЕНЬИ

© 2024 г. М. Б. Ахмеджанова<sup>1,\*</sup>, В. С. Кожевников<sup>2,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 10.09.2023 г.

После доработки 25.02.2024 г.

Принято к публикации 27.02.2024 г.

Доказана концентрация в интервале размера  $2 + o(1/p)$  размера максимального индуцированного леса (ограниченной и неограниченной степени) в  $G(n, p)$  при  $C_\varepsilon/n < p < 1 - \varepsilon$  для произвольного заданного  $\varepsilon > 0$ . Доказана двухточечная концентрация размера максимального индуцированного леса (а также дерева) ограниченной степени в биномиальном случайном графе Эрдёша–Реньи  $G(n, p)$  при  $p = \text{const}$ .

*Ключевые слова:* случайный граф, граф Эрдёша–Реньи, индуцированный подграф, дерево, лес

DOI: 10.31857/S2686954324020041, EDN: XJAOZE

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Случайные графы играют ключевую роль в комбинаторной математике и теории графов. Наиболее распространённой и хорошо изученной моделью случайного графа является модель Эрдёша–Реньи, обозначаемая как  $G(n, p)$ . В таком случайном графе  $n$  вершин, и каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью  $p$  независимо от других пар. При анализе таких графов часто рассматривается понятие индуцированного подграфа. Под индуцированным подграфом графа  $G$ , обозначаемым  $G[V']$ , понимается подграф графа  $G$ , вершины которого составляют подмножество  $V'$  множества вершин  $V$  исходного графа  $G$ , и рёбра которого включают все рёбра исходного графа, соединяющие пары вершин из  $V'$ . Говоря о максимальном индуцированном подграфе, обычно имеют в виду максимальный по размеру (по числу вершин) индуцированный подграф. Ещё одно ключевое понятие в анализе случайных графов – “асимптотически почти наверное” (а.п.н.).

Говорят, что некоторое свойство выполняется а.п.н., если оно истинно с вероятностью, стремящейся к 1 при  $n$  стремящемся к бесконечности.

Боллобаш и Эрдёш в своей фундаментальной статье [1] доказали, что если  $p$  является константой, то существует функция  $f(n) \sim 2 \log_q(np)$ , где  $q = \frac{1}{1-p}$ , такая что а.п.н.

$$f(n) \leq \alpha(G(n, p)) \leq f(n) + 1,$$

где  $\alpha(G)$  обозначает число независимости графа  $G$ , оно определяется как максимальный размер множества вершин  $V$  в  $G$ , в котором никакие две вершины не соединены ребром.

После этого открытия появился ряд статей, демонстрирующих, что вышеуказанный результат справедлив не только для числа независимости, но и для размера максимального индуцированного:

- подграфа ограниченной степени: Фунтулакис, Канг, МакДиармид [2],
- подграфа с ограниченной средней степенью: Фунтулакис, Канг, МакДиармид [3],
- пути и цикла: Дутта, Субраманиан [4],
- дерева и подграфа с заданной средней степенью: Камалдинов, Скоркин, Жуковский [5],
- леса: Кривошапка, Жуковский [6].

Результаты этого типа называются результатами 2-точечной концентрации, так как вероятностное

<sup>1</sup> Научно-технологический университет имени короля Абдаллы, Кауст, Саудовская Аравия

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

\* E-mail: margarita.akhmejanova@kaust.edu.sa

\*\* E-mail: vladislavkozhevnikov@gmail.com

распределение исследуемой случайной величины (например,  $\alpha(G(n, p))$ ) асимптотически концентрируется в не более чем двух целых значениях.

Оказывается, что если ослабить ограничение  $p = \text{const}$ , максимальный размер индуцированных подграфов многих типов всё равно концентрируется в некоторой окрестности величины  $2\log_q(np)$ . Наиболее значимый результат был получен Фризом в его статье [7]. Он доказал, что существует функция  $f(n) \sim 2\log_q(np)$  такая, что если  $\frac{C_\varepsilon}{n} < p = o(1)$ , где  $C_\varepsilon$  – достаточно большая константа, зависящая от  $\varepsilon$ , то а.п.н.

$$|\alpha(G(n, p)) - f(n)| \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Насколько нам известно, это единственный результат, показывающий концентрацию в интервале размера  $o\left(\frac{1}{p}\right)$ . Однако было установлено, что при ослаблении ограничений на размер интервала, а именно, при рассмотрении концентрации в интервале  $(2 \pm \varepsilon)\log_q(np)$  для фиксированного  $\varepsilon > 0$  и  $\frac{C_\varepsilon}{n} < p = o(1)$ , где  $C_\varepsilon$  – достаточно большая константа, зависящая от  $\varepsilon$ , такая концентрация наблюдается также для размера максимального индуцированного:

1. дерева [8] (хотя доказательство предоставлено для  $p = \frac{C_\varepsilon}{n}$ , оно также справедливо для больших значений  $p$ ),
2. паросочетания [9],
3. пути и цикла [10].

Нами доказана концентрация размера наибольшего леса (неограниченной степени) в интервале размера  $o\left(\frac{1}{p}\right)$  для случая  $p \rightarrow 0$ . Мы также показываем, что аналогичное утверждение имеет место быть для лесов ограниченной степени.

**Теорема 1.** Пусть  $p = p(n) \in (0, 1)$ ,  $q = \frac{1}{1-p}$ .

Пусть  $X$  обозначает размер максимального индуцированного леса в  $G(n, p)$ . Тогда для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  существует константа  $C > 0$ , такая что если  $\frac{C}{n} < p < 1 - \varepsilon$ , то а.п.н

$$\left\lfloor 2\log_q(enp(1 - \varepsilon)) + 3 \right\rfloor \leq X \leq \left\lfloor 2\log_q(enp(1 + \varepsilon)) + 3 \right\rfloor.$$

**Теорема 2.** Пусть  $p = p(n) \in (0, 1)$ ,  $q = \frac{1}{1-p}$ .

Пусть  $Y$  обозначает размер максимального индуцированного леса в  $G(n, p)$  с максимальной степенью, не превосходящей  $\Delta$ . Тогда для любых фиксированных  $\Delta \geq 3$  и  $\varepsilon > 0$  существуют такие константы  $a_\Delta \in (1, e)$  и  $C > 0$ , что если  $\frac{C}{n} < p < 1 - \varepsilon$ , то а.п.н

$$\left\lfloor 2\log_q(a_\Delta np(1 - \varepsilon)) + 3 \right\rfloor \leq Y \leq \left\lfloor 2\log_q(a_\Delta np(1 + \varepsilon)) + 3 \right\rfloor.$$

Нами также доказана двухточечная концентрация размера наибольшего индуцированного леса и дерева ограниченной степени в  $G(n, p = \text{const})$ .

**Теорема 3.** Пусть  $p = \text{const}$ ,  $q = \frac{1}{1-p}$ . Тогда

для любого фиксированного  $\Delta \geq 3$  существует константа  $a_\Delta \in (1, e)$ , такая что а.п.н. размер максимального индуцированного дерева с максимальной степенью, не превосходящей  $\Delta$ , равен либо  $\left\lfloor 2\log_q(a_\Delta np) + 1 \right\rfloor$ , либо  $\left\lfloor 2\log_q(a_\Delta np) + 2 \right\rfloor$ .

**Теорема 4.** Пусть  $p = \text{const}$ ,  $q = \frac{1}{1-p}$ . Тогда

для любого фиксированного  $\Delta \geq 3$  существует константа  $a_\Delta \in (1, e)$ , такая что а.п.н. размер максимального индуцированного леса с максимальной степенью, не превосходящей  $\Delta$ , равен либо  $\left\lfloor 2\log_q(a_\Delta np) + 1 \right\rfloor$ , либо  $\left\lfloor 2\log_q(a_\Delta np) + 2 \right\rfloor$ .

## 2. СХЕМЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

В этом разделе мы изложим основные шаги в доказательствах теорем 1–4.

**Доказательство теоремы 1.** Доказательство основано на комбинации методов первого и второго момента, а также применении неравенства Талагранна. Пусть  $X_k$  – это количество индуцированных корневых (с выделенной вершиной, корнем, в каждой компоненте) лесов в  $G(n, p)$  на  $k$  вершинах. Тогда

$$\begin{aligned} EX_k &= \binom{n}{k} \sum_{m=1}^k \binom{k-1}{m-1} k^{k-m} p^{k-m} (1-p) \binom{k}{2}^{-(k-m)} = \\ &= \binom{n}{k} q^{-\binom{k}{2}} (kpq + 1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Положим  $k_{+\varepsilon} := \lceil 2\log_q(enp(1 + \varepsilon)) + 3 \rceil$ ,  $k_{-\varepsilon} := \lfloor 2\log_q(enp(1 - \varepsilon)) + 3 \rfloor$ . Тогда  $EX_{k_{+\varepsilon}} \rightarrow 0$  и, пользуясь методом первого момента, мы доказываем верхнюю оценку.

Для доказательства нижней оценки сначала мы применим хорошо известный метод второго момента, суть которого заключается в том, что если дисперсия мала по сравнению с квадратом математического ожидания, то вероятность того, что исследуемая случайная величина больше нуля, велика. А именно, если  $X$  принимает только целые неотрицательные значения, то:

$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{(EX)^2}{EX^2} = \frac{1}{1 + \frac{\text{Var}X}{(EX)^2}}.$$

Следующим ключевым моментом является оценивание дисперсии  $\text{Var}X_k$  для  $k = k_{-\varepsilon}$ :

$$\text{Var}X_k \leq \sum_{\ell=1}^k F_\ell,$$

где  $F_\ell$  – ожидание числа (упорядоченных) пар индуцированных корневых лесов на  $k$  вершинах, имеющих  $\ell$  общих вершин. Далее мы получаем точное выражение для величины  $F_\ell$ , перечисляя пары пересекающихся индуцированных лесов с заданным числом компонент и заданными размерами компонент в их пересечении. Для этого нам потребовалось вывести некоторое обобщение формулы Кэли: пусть  $F$  – ациклический подграф  $K_n$  с  $m$  компонентами на  $f_1, f_2, \dots, f_m$  вершинах. Тогда величина  $f(k, h, \{f_1, \dots, f_m\})$ , равная количеству корневых лесов с  $h$  компонентами в  $K_n$ , таких что  $F$  является индуцированным подграфом, выражается следующим образом:

$$f(k, h, \{f_1, \dots, f_m\}) = f_1 \cdot \dots \cdot f_m \sum_{k_0=0}^{k-\ell} \binom{k-\ell}{k_0} \ell^{k-\ell-k_0} \times \\ \times \binom{k_0+m-1}{h-1} (k-\ell)^{k_0+m-h},$$

где  $f_1 + f_2 + \dots + f_m = \ell$ .

Заметим, что метод второго момента позволяет доказать теорему только для  $p > (\ln n)^2 / \sqrt{n}$ . Для остальных  $p$  мы дополнительно используем неравенство Талаграна, о методике применения которого можно прочитать в [11].

**Доказательство теоремы 2.** Техника доказательства остается прежней, но требует весьма точной оценки величины  $F_\Delta(n, m)$ , равной числу помеченных корневых лесов с  $n$  вершинами и  $m$  компонентами, максимальная степень которых не превышает  $\Delta$ . Используя модифицированные коды Прюфера для таких лесов, можно получить выражение для  $F_\Delta(n, m)$  через производящие функции:

$$F_\Delta(n, m) = \binom{n-1}{m-1} (n-m)! [x^{n-m}] (f_\Delta(x))^n = \\ = \frac{(n-1)!}{(m-1)!} [x^n] x^m (f_\Delta(x))^n,$$

где  $f_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\Delta-1} \frac{x^k}{k!}$ , а  $[x^n]$  – оператор взятия ко-

эффициента при  $x^n$ . Данное выражение для  $F_\Delta(n, m)$  оказывается очень удобным при вычислении ожидания числа индуцированных корневых лесов ограниченной степени на  $k$  вершинах в  $G(n, p)$ , которое мы обозначим через  $Z_k$ . Не сложно проверить, что

$$EZ_k = \binom{n}{k} (1-p)^{\binom{k}{2}} \sum_{m=1}^k F_\Delta(k, m) p^{k-m} (1-p)^{-(k-m)} = \\ = \binom{n}{k} q^{-\binom{k}{2}} (pq)^{k-1} (k-1)! [x^k] x (f_\Delta(x))^k e^{\frac{x}{pq}}.$$

Далее, для подсчета коэффициента при  $x^n$  мы применяем комплексный анализ:

$$[x^k] x (f_\Delta(x))^k e^{\frac{x}{pq}} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint z (f_\Delta(z))^k e^{\frac{z}{pq}} \frac{dz}{z^{k+1}} \sim \frac{(f_\Delta(r))^k e^{\frac{r}{pq}}}{r^{k-1} \sqrt{2\pi\beta(r)k}},$$

вычисляя асимптотику интеграла методом седловой точки. В выражении выше  $r$  – седловая точка, получаемая как решение уравнения  $\frac{rf'_\Delta(r)}{f_\Delta(r)} + \frac{r}{kpq} = 1$ , а  $\beta(r) = \frac{r^2 f''_\Delta(r)}{f_\Delta(r)} + \frac{2r}{kpq} - \frac{r^2}{(kpq)^2}$ .

**Доказательство теоремы 3.** Техника доказательства остается прежней, однако теперь нам потребуется оценка числа  $T_\Delta(n)$  помеченных деревьев на  $n$  вершинах с максимальной степенью, не превосходящей  $\Delta$ . Мы покажем, что верно следующее утверждение: для любого цело-

го числа  $\Delta \geq 3$  существует константа  $a_\Delta \in [1, e)$ , такая что

$$T_\Delta(n) = \Theta \left( \left( \frac{a_\Delta}{e} \right)^n n^{n-2} \right).$$

Доказательство последнего утверждение опирается на использование центральной предельной теоремы (ЦПТ). Пусть, как и выше,

$$f_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\Delta-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Используя коды Прюфера и производящие функции, легко получить выражение

$$T_\Delta(n) = \left( \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left( (f_\Delta(x))^n \right) \right) \Big|_{x=0}.$$

Введем случайную величину  $\xi_\Delta$  с производящей функцией

$$\varphi_{\xi_\Delta}(x) := \text{Ex}^{\xi_\Delta} = \frac{f_\Delta(\alpha_\Delta x)}{f_\Delta(\alpha_\Delta)},$$

где  $\alpha_\Delta$  – параметр, определяемый ниже, и случайную величину  $S_n$  с производящей функцией

$$\varphi_{S_n}(x) = \left( \varphi_{\xi_\Delta}(x) \right)^n.$$

Тогда для любого целого неотрицательного  $m$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = m) &= \frac{\alpha_\Delta^m}{m!} \frac{d^m}{dx^m} \left( \varphi_{S_n} \left( \frac{x}{\alpha_\Delta} \right) \right) \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{\alpha_\Delta^m}{m! (f_\Delta(\alpha_\Delta))^n} \frac{d^m}{dx^m} \left( (f_\Delta(x))^n \right) \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Подставляя  $m = n - 2$ , получаем

$$\begin{aligned} T_\Delta(n) &= \frac{(f_\Delta(\alpha_\Delta))^n}{\alpha_\Delta^{n-2}} (n-2)! \cdot \mathbb{P}(S_n = n-2) \sim \\ &\sim \alpha_\Delta \sqrt{\frac{f_\Delta(\alpha_\Delta)}{f_{\Delta-2}(\alpha_\Delta)}} \left( \frac{f_{\Delta-1}(\alpha_\Delta)}{e} \right)^n n^{n-2}, \end{aligned}$$

вычисляя асимптотику вероятности  $\mathbb{P}(S_n = n-2)$  с помощью локальной ЦПТ, применимой при условии, что  $n-2$  достаточно близко к  $\text{ES}_n$ , чего можно достигнуть подбором  $\alpha_\Delta$ , а именно, определив  $\alpha_\Delta$  через уравнение  $\text{E}\xi_\Delta = \frac{\alpha_\Delta f_{\Delta-1}(\alpha_\Delta)}{f_\Delta(\alpha_\Delta)} = 1$ . Полагая  $a_\Delta = f_{\Delta-1}(\alpha_\Delta)$ ,

получаем желаемый результат.  $\square$

**Доказательство теоремы 4.** Нижняя оценка следует из теоремы 3, поскольку каждое дерево

является лесом. Верхняя же оценка легко получается подсчётом математического ожидания и применением метода первого момента.  $\square$

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования В. Кожевникова выполнены при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-10092). Работа Ахмеджановой по теореме 3 выполнена за счет гранта Российского научного фонда No 22-21-00202, а работа по теоремам 1, 2 и 4 выполнена при финансировании Королевского университета науки и технологий имени короля Абдаллы (KAUST). Ахмеджанова была лауреатом премии “Молодая математика России” 2020 года и выражает благодарность организаторам и жюри за оказанное доверие.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bollobás B., Erdős P.* Cliques in random graphs // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1976. V. 80. P. 419–427.
2. *Fountoulakis N., Kang R.J., McDiarmid C.* The  $t$ -stability number of a random graph // *The Electronic Journal of Combinatorics.* 2010. V. 17. P. 1–10.
3. *Fountoulakis N., Kang R.J., McDiarmid C.* Largest sparse subgraphs of random graphs // *European Journal of Combinatorics.* 2014. V. 35. P. 232–244.
4. *Dutta K., Subramanian C.R.* On Induced Paths, Holes and Trees in Random Graphs // *2018 Proceedings of the Fifteenth Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics.* 2018. P. 168–177.
5. *Kamaldinov D., Skorkin A., Zhukovskii M.* Maximum sparse induced subgraphs of the binomial random graph with given number of edges // *Discrete Mathematics.* 2021. V. 344. P. 112205.
6. *Krivoshapko M., Zhukovskii M.* Maximum induced forests in random graphs // *Discrete Applied Mathematics.* 2021. V. 305. P. 211–213.
7. *Frieze A.M.* On the independence number of random graphs // *Discrete Mathematics.* 1990. V. 81. P. 171–175.
8. *Fernandez de la Vega W.* The largest induced tree in a sparse random graph // *Random Structures and Algorithms.* 1996. V. 9. P. 93–97.
9. *Cooley O., Draganić N., Kang M., Sudakov B.* Large Induced Matchings in Random Graphs // *SIAM Journal on Discrete Mathematics.* 2021. V. 35. P. 267–280.
10. *Draganić N., Glock S., Krivelevich M.* The largest hole in sparse random graphs // *Random Structures & Algorithms.* 2022. V. 61. P. 666–677.
11. *Janson S., Łuczak T., Ruciński A.* *Random Graphs.* John Wiley & Sons, Inc. 2000.

**INDUCED FORESTS AND TREES IN ERDÖS–RÉNYI RANDOM GRAPH****M. B. Akhmejanova<sup>a,\*</sup>, V. S. Kozhevnikov<sup>b,\*\*</sup>**

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

<sup>a</sup>*King Abdullah University of Science and Technology, KAUST, KSA*<sup>b</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, Russia*

We prove concentration in the interval of size  $o(1/p)$  for the size of the maximum induced forest (of bounded and unbounded degree) in  $G(n, p)$  for  $C_\varepsilon/n < p < 1 - \varepsilon$  for arbitrary fixed  $\varepsilon > 0$ . We also show 2-point concentration of the size of the maximum induced forest (and tree) of bounded degree in the binomial random graph  $G(n, p)$  for  $p = \text{const}$ .

*Keywords:* random graph, Erdős–Rényi model, induced subgraph, tree, forest

УДК 517.956.32+517.984

## ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕГЛАДКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© 2024 г. И. С. Ломов<sup>1, \*</sup>

Представлено академиком И.А. Соколовым

Поступило 02.10.2023 г.

После доработки 09.02.2024 г.

Принято к публикации 09.02.2024 г.

При минимальных условиях на правую часть волнового уравнения построено обобщенное решение смешанной задачи. Решение представлено в виде ряда из метода Фурье, найдена его сумма. Приведен вид обобщенного решения смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения.

*Ключевые слова:* волновое уравнение, телеграфное уравнение, метод Фурье, метод Коши–Пуанкаре

DOI: 10.31857/S2686954324020052, EDN: XIZSRT

### ВВЕДЕНИЕ

Основное внимание в статье уделено построению обобщенного решения следующей задачи:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (1)$$
$$(x,t) \in Q = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,\infty)\},$$

$$U_1(u) \equiv u_x(0,t) + a_1 u(0,t) + b_1 u(1,t) = 0, \quad (2)$$
$$U_2(u) \equiv u_x(1,t) + a_2 u(0,t) + b_2 u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad (3)$$
$$x \in [0,1],$$

где коэффициенты  $a_i, b_i, i = 1, 2$ , – произвольные комплексные числа, а комплекснозначная функция  $f(x,t) \in L(Q_T)$ , суммируемая функция,  $Q_T = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T)\}, T > 0$  – произвольно зафиксированное число. Будем называть функцию  $f(x,t)$  локально суммируемой в полуполосе  $Q$ .

Далее будет указано, как построить обобщенное решение более общей задачи

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (4)$$
$$(x,t) \in Q,$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

\* E-mail: lomov@cs.msu.ru

$$U_j(u) = 0, \quad j = 1, 2, t \geq 0, \quad (5)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (6)$$
$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1],$$

где  $q, f, \varphi$  – комплекснозначные функции,  $f(x,t)$  – локально суммируемая в полуполосе  $Q$  функция,  $\varphi(x) \in L(0,1)$ , суммируемая функция,  $q(x,t)$  такова, что найдется функция  $q_0(x) \in L(0,1)$ , так что справедливо  $|q(x,t)| \leq q_0(x)$  для  $(x,t) \in Q$ , и функция  $q(x,t)u(x,t) \in L(Q_T)$  для любого  $T > 0$ .

Отметим, что задача (4)–(6) при  $f(x,t) = 0$  и потенциале  $q$  не зависящем от  $t$ , была исследована в работе [1]. Найдены необходимые и достаточные условия существования сильного решения задачи. Применен метод А.П. Хромова, основанный на использовании подхода А.Н. Крылова для ускорения сходимости рядов Фурье и на идее Л. Эйлера по работе с расходящимися рядами. Для исследования неоднородной задачи (1)–(3) этот метод применить не удастся. Будет использована другая схема, предложенная В.В. Корневым и А.П. Хромовым.

1. Задаче (1), (2) поставим в соответствие дифференциальный оператор  $L$ , действующий в пространстве  $L^2(0,1)$ :

$$L : ly = -y''(x), \quad (7)$$
$$x \in (0,1),$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где  $U_j$  – краевые формы (2). Обозначим через  $R_\lambda$  резольвенту оператора  $L$ ,  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ ,  $\lambda$  – спектральный параметр,  $E$  – единичный оператор.

Краевые условия (2) являются регулярными по Биркгофу и даже усиленно регулярными ([2], с. 72–73). Отметим, что результаты данной статьи для задачи (1)–(3) остаются верными и в случае любых двухточечных регулярных краевых условий. Изменится только способ продолжения функции  $f(x, t)$  по переменной  $x$  с отрезка  $[0, 1]$  на всю прямую.

Выпишем формальный ряд из метода Фурье, отвечающий задаче (1)–(3) (см. [3]):

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \times \int_0^t (R_\lambda f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau d\lambda, \quad (8)$$

$$x \in [0, 1], t \geq 0.$$

Здесь  $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$  означает, что оператор  $R_\lambda$  применяется к функции  $f(x, \tau)$  по переменной  $x$  ( $\tau$  – параметр),  $\lambda = \rho^2$ ,  $\text{Re} \rho \geq 0$ ,  $\gamma_n$  – образ в  $\lambda$  –плоскости окружности  $\tilde{\gamma}_n = \{\rho : |\rho - \pi n| = \delta\}$ , число  $\delta > 0$  и достаточно мало, число  $r > 0$  достаточно велико и зафиксировано,  $n_0$  – такой номер, что при  $n \geq n_0$  внутри  $\gamma_n$  находится по одному собственному значению оператора  $L$  и все контуры  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$  находятся вне круга радиуса  $|\lambda| = r$ , а остальные собственные значения – внутри этого круга.

Для вывода формулы (8) использован резольвентный подход, связанный с методом Коши–Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты по спектральному параметру. Он имеет преимущество по сравнению с традиционным методом разделения переменных, поскольку не требует ни уточнения асимптотики собственных значений, ни информации о кратности спектра или о наличии присоединенных функций. Вид контуров интегрирования в формуле (8) может быть и иным. Главное здесь, что все собственные значения оператора (7) находятся в объединении областей, охватываемых этими контурами.

Решение задачи (1)–(3) называем *сильным*, если оно удовлетворяет условиям (2), (3) в обычном смысле, а уравнению (1) – почти всюду в области  $Q$ .

**Теорема 1 ([3], теорема 1).** *Если  $u(x, t)$  – сильное решение задачи (1)–(3), причем дополнительно выполняется условие единственности  $u_n(x, t) \in L(Q_T)$  при любом  $T > 0$ , то оно единственно и находится по формуле (8), в которой ряд справа при любом зафиксированном  $t \geq 0$  сходится абсолютно и равномерно по  $x \in [0, 1]$ .*

Теорема 1 говорит о том, что формальный ряд (8) и смешанная задача (1)–(3) тесно связаны. Расширим понятие этой связи.

Правая часть равенства (8) имеет смысл для любой функции  $f(x, t) \in L(Q_T)$  при любых  $T > 0$ . В этом случае будем говорить, что выражение (8) также является формальным решением смешанной задачи (1)–(3), понимаемой чисто формально. Будем называть ее в дальнейшем *обобщенной смешанной задачей*.

Таким образом, мы сначала определяем формальное решение (8), которое теперь выглядит как реальный объект (несмотря на то, что ряд (8), вообще говоря, расходящийся), и заключаем, что он соответствует новой смешанной задаче (обобщенной) (1)–(3). То есть и здесь мы устанавливаем связь смешанной задачи с рядом (8).

Наша цель: доказать, что для всех значений  $(x, t) \in Q$  ряд (8) сходится для любой функции  $f(x, t)$  из указанного класса. Этот ряд мы и назовем *обобщенным решением* (обобщенной) смешанной задачи (1)–(3). Найдем сумму этого ряда, эта сумма связана с функцией  $\tilde{f}(x, t)$ , являющейся продолжением функции  $f(x, t)$  по переменной  $x$  с отрезка  $[0, 1]$  на всю числовую прямую  $x \in \mathbb{R}$  при каждом зафиксированном значении  $t > 0$ .

Для того чтобы выяснить, какой вид имеет сумма ряда (8), заметим следующее:  $\rho^{-1} \sin \rho(t - \tau) = \int_0^{t-\tau} \cos \rho \eta d\eta$ , применим новую

аксиому для расходящихся рядов [1]  $\int \sum = \sum \int$ , где  $\int$  – определенный интеграл, тогда ряд (8) можно записать следующим образом:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \times \int_0^t \int_0^{t-\tau} (R_\lambda f(\cdot, \tau)) \cos \rho \eta d\eta d\tau d\lambda = \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} Z_0(x, \eta, f(\cdot, \tau)) d\eta,$$

где  $Z_0(x, \eta, f(\cdot, \tau))$  – формальное решение задачи (4)–(6) в случае однородного уравнения (4), нулевого потенциала и с начальной функцией  $\varphi(x) = f(x, \tau)$ ,  $\tau$  – параметр. За сумму ряда  $Z_0$  примем следующее выражение [1]:

$$Z_0(x, \eta, f(\cdot, \tau)) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(x + \eta, \tau) + \tilde{f}(x - \eta, \tau)], \quad (9)$$

где  $\tilde{f}(\eta, \tau)$  есть продолжение по  $\eta$  функции  $f(\eta, \tau)$  с отрезка  $[0, 1]$  на всю прямую. Тогда имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} [\tilde{f}(x + \eta, \tau) + \tilde{f}(x - \eta, \tau)] d\eta,$$

сделав замены переменных, получаем

$$U_1(u) = u_x(0, t) + a_1 u(0, t) + b_1 u(1, t) = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &\tilde{f}'_x(t, \tau) + \tilde{f}'_x(-t, \tau) + a_1 (\tilde{f}(t, \tau) + \tilde{f}(-t, \tau)) + \\ &+ b_1 (\tilde{f}(1 + t, \tau) + \tilde{f}(1 - t, \tau)) \end{aligned} \right] = 0.$$

Здесь имеется в виду производная  $\tilde{f}'_x(\psi(x), \tau) = \tilde{f}'_x(y, \tau)$ , где  $y = \psi(x)$ . Заменяем переменную  $t$  на  $x$ , умножим равенство на 2:

$$\tilde{f}'_x(x, \tau) + \tilde{f}'_x(-x, \tau) + a_1 (\tilde{f}(x, \tau) + \tilde{f}(-x, \tau)) + b_1 (\tilde{f}(1 + x, \tau) + \tilde{f}(1 - x, \tau)) = 0, x \geq 0. \quad (11)$$

Аналогично из второго условия (2)  $U_2(u) = 0$  получаем

$$\begin{aligned} &\tilde{f}'_x(1 + x, \tau) + \tilde{f}'_x(1 - x, \tau) + \\ &+ a_2 (\tilde{f}(x, \tau) + \tilde{f}(-x, \tau)) + \\ &+ b_2 (\tilde{f}(1 + x, \tau) + \tilde{f}(1 - x, \tau)) = 0, x \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{f}(x, \tau) = f(x, \tau), \quad x \in [0, 1]. \quad (13)$$

Отметим, что в равенствах (11), (12) переменная  $x \in [0, \infty)$ .

Рассмотрим систему (11)–(13).

**Лемма 1.** *Имеет место следующее равенство:*

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \tilde{f}(-x, \tau) \\ \tilde{f}(1 + x, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}(-x, \tau) \\ \tilde{f}(1 - x, \tau) \end{pmatrix} = \\ &= 2M \int_0^x e^{M(x-t)} \begin{pmatrix} \tilde{f}(-x, \tau) \\ \tilde{f}(1 + x, \tau) \end{pmatrix} dt, \quad (14) \\ &x \in [0, \infty), \tau \geq 0, \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta. \quad (10)$$

Теперь правая часть равенства (10) определена при всех  $(x, t) \in (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$ .

Припишем сумму (10), вообще говоря, расходящемуся ряду (8). Ниже мы докажем, что если функция  $f(x, t)$  достаточно гладкая, то ряд (8) есть сильное решение задачи (1)–(3).

**2.** Построим продолжение  $\tilde{f}(x, t)$  функции  $f(x, t)$ , используя краевые условия (2). Всюду при этом  $t$ , а затем  $\tau$  рассматриваются как параметр.

Пусть  $\tilde{f}(x, t) \in C^1(\mathbb{R})$  по переменной  $x$ . Подставим функцию (9) в краевые условия (2), заменив переменную  $\eta$  на  $t$ . Имеем

где  $M$  – матрица,  $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -a_2 & -b_2 \end{pmatrix}$ .

Рассмотрим равенство (14), считая что

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}(-x, \tau) \\ \tilde{f}(1 - x, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(-x, \tau) \\ f(1 - x, \tau) \end{pmatrix},$$

при  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x, \tau)$  – произвольная функция из класса  $L(Q_T)$  для каждого  $T > 0$ . Тогда формула (14) дает однозначное продолжение  $\tilde{f}(x, \tau)$  произвольной функции  $f(x, \tau) \in L(Q_T)$  для любого  $T > 0$  на всю числовую ось  $(-\infty, \infty)$  при каждом  $\tau \geq 0$ . Очевидно,  $\tilde{f}(x, t) \in L_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ .

**3.** Обозначим через  $C^2_U(Q)$  множество функций  $f(x, t)$ ,  $(x, t) \in Q$ , дважды непрерывно дифференцируемых в полуполосе  $Q$  и удовлетворяющих краевым условиям (2):  $U_j(f) = 0, j = 1, 2, t \geq 0$ .

**Теорема 2.** *Если функция  $f(x, t) \in C^2_U(Q)$ , то функция (10)  $u(x, t), x \in [0, 1], t \geq 0$ , является сильным решением задачи (1)–(3) с условием единственности  $u_{tt}(x, t) \in L(Q_T)$  для любого  $T > 0$ .*

**Следствие из теоремы 2.** *Если функция  $f(x, t) \in C^2_U(Q)$ , то ряд (8) при всех  $(x, t) \in Q$  сходится к функции  $u(x, t)$ , определяемой формулой (10).*

**Замечание.** Если  $f(x, t)$  – локально суммируемая функция в полуполосе  $Q$ , то формула

(10) определяет непрерывную функцию  $u(x, t)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$ .

**Теорема 3.** Пусть функция  $f(x, t)$  является локально суммируемой в полуполосе  $Q$ ,  $u(x, t)$  – функция, определяемая формулой (10). Тогда ряд (8) есть ряд Фурье функции  $u(\cdot, t)$  при любом  $t \geq 0$ .

Установим еще одно свойство функции (10)  $u(x, t)$ .

**Теорема 4.** Пусть функция  $f(x, t)$  – локально суммируемая в полуполосе  $Q$ . Тогда при любом зафиксированном значении переменной  $t$  функция  $u(x, t)$  – функция (10), имеет ограниченную вариацию при  $x \in [0, 1]$ .

**Теорема 5.** Пусть функция  $f(x, t)$  – локально суммируема в полуполосе  $Q$ . Тогда при любом зафиксированном числе  $t \geq 0$  ряд (8) сходится к функции  $u(x, t)$ , определяемой формулой (10), равномерно по  $x$  на любом отрезке  $[a, b] \subset (0, 1)$ . При этом на всем отрезке  $[0, 1]$  имеет место следующая оценка скорости сходимости ряда (8) к функции (10):

$$\left\| S_n(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta \right\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

где через  $S_n(x, t)$  обозначена  $n$ -я частичная сумма ряда (8).

Утверждение теоремы о равномерной сходимости ряда (8) следует из теорем 3, 4, признака Жордана сходимости тригонометрического ряда Фурье [4, с. 121] и теоремы равносходимости Стоуна [5]. Оценка (43) получена из теоремы о скорости равносходимости спектральных разложений и тригонометрического ряда Фурье [6, 7, с. 23].

**4.** Для построения обобщенного решения смешанной задачи (4)–(6) воспользуемся одним из двух методов, предложенных А.П. Хромовым, – секвенциальным или аксиоматическим методами (см., например, [8]). Обобщенное решение получается в виде быстро сходящегося функционального ряда – обобщенная формула Даламбера. Сформулируем соответствующее утверждение.

**Теорема 6.** Пусть для задачи (4)–(6) выполняются следующие условия: функции  $\varphi(x) \in L(0, 1)$ ,  $f(x, t) \in L(Q_T)$  для любого  $T > 0$ , функция  $q(x, t)$  такова, что найдется функция  $q_0(x) \in L(0, 1)$ , так что справедливо  $|q(x, t)| \leq q_0(x)$  для  $(x, t) \in Q$ , и функция  $q(x, t)u(x, t) \in L(Q_T)$  для любого  $T > 0$ .

Тогда задача (4)–(6) имеет обобщенное решение, которое представляется формулами

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta,$$

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta, \tau) d\eta, n \geq 1,$$

где функция  $\tilde{f}_n(\eta, \tau) = f_n(\eta, \tau) = -q(\eta, \tau)a_n(\eta, \tau)$  при  $\eta \in [0, 1]$ ,  $n \geq 0$ , при каждом  $\tau$ , далее функция  $f_n(\eta, \tau)$  продолжается по переменной  $\eta$  на всю числовую прямую с использованием формулы (14), как это было сделано для функции  $f(\eta, \tau)$ .

Отметим, что аналогичный подход для построения обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения со смешанной производной применен в работе [9] В.С. Рыхлова.

Другой подход к исследованию смешанных задач для гиперболических уравнений получил развитие в работах Ф.Е. Ломовцева, см. [11].

Метод Фурье для построения другого типа обобщенного решения смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка использован в книге [11, с. 492]. Решение построено в предположении, что правая часть уравнения, функция  $f(x, t) \in L^2(0, l)$  по переменной  $x$  при каждом  $t \geq 0$  и непрерывна в пространстве  $L^2(0, l)$  по  $t$  на полупрямой  $[0, \infty)$ .

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор признателен А.П. Хромову и В.В. Корневу за полезные обсуждения результатов работы и за ценные предложения по схеме исследования задачи (1)–(3).

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов А.П., Корнев В.В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 215–238. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238>

2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
3. *Хромов А.П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 717–731. <https://doi.org/10/1134/S0374064119050121>
4. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы. 1961. 936 с.
5. *Stone M.H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. V. 28. N 4. С. 695–761.
6. *Ломов И.С.* О скорости сходимости биортогональных разложений функций // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 12. С. 1618–1629.
7. *Ломов И.С.* Спектральный метод В.А. Ильина. Несамосопряженные операторы. II. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений. М.: МАКС Пресс, 2023. 380 с.
8. *Ломов И.С.* Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1471–1483. <https://doi.org/10.31857/S0374064122110048>
9. *Рыхлов В.С.* Обобщенная начально–граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной // Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. Т. 69. № 2. С. 342–363. <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363>
10. *Ломовцев Ф.Е.* Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке // Проблемы физики, математики и техники. 2022. № 1 (50). С. 62–73.
11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

## GENERALIZED SOLUTION OF A MIXED PROBLEM FOR A WAVE EQUATION WITH A NON-SMOOTH RIGHT-HAND SIDE

I. S. Lomov<sup>a,\*</sup>

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Under minimal conditions on the right side of the wave equation, a generalized solution of the mixed problem is constructed. The solution is presented as a series from the Fourier method, its sum is found. The form of a generalized solution of a mixed problem for an inhomogeneous telegraphic equation is given.

*Keywords:* wave equation, telegraphic equation, Fourier method, Cauchy–Poincare method

УДК 517.98

## О ЯДРАХ ИНВАРИАНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ. ЗАДАЧА ГРИНЕВИЧА–НОВИКОВА

© 2024 г. М. М. Маламуд<sup>1,\*</sup>, В. В. Марченко<sup>2,\*</sup>

Представлено академиком РАН И.А. Таймановым

Поступило 25.01.2024 г.

После доработки 14.02.2024 г.

Принято к публикации 16.02.2024 г.

Согласно Березину–Фаддееву под оператором Шрёдингера с точечными взаимодействиями

$$-\Delta + \sum_{j=1}^m \alpha_j \delta(x - x_j), \quad X = \{x_j\}_1^m \subset \mathbb{R}^3, \quad \{\alpha_j\}_1^m \subset \mathbb{R},$$

понимают любое самосопряжённое расширение сужения  $-\Delta_X$  оператора Лапласа  $-\Delta$  на подмножество  $\{f \in H^2(\mathbb{R}^3) : f(x_j) = 0, 1 \leq j \leq m\}$  соболевского пространства  $H^2(\mathbb{R}^3)$ . В настоящей заметке изучаются расширения (реализации), инвариантные относительно группы симметрий множества  $X = \{x_j\}_1^m$  вершин правильного  $m$ -угольника. Такие реализации  $\mathbf{H}_B$  параметризуются специальными циркулянтными матрицами  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . Мы описываем все такие реализации с нетривиальными ядрами. Решена задача Гриневича–Новикова о простоте нулевого собственного значения реализации  $\mathbf{H}_B$  со скалярной матрицей  $B = \alpha I$  и четным  $m$ . Показано, что при нечётном  $m$  нетривиальные ядра всех реализаций  $\mathbf{H}_B$  со скалярными  $B = \alpha I$  двумерны.

Кроме того, для произвольных реализаций ( $B \neq \alpha I$ ) доказана оценка  $\dim(\ker \mathbf{H}_B) \leq m - 1$  и описаны все инвариантные реализации с максимальной размерностью  $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = m - 1$ . Одна из них – расширение Крейна – минимальное положительное расширение оператора  $-\Delta_X$ .

*Ключевые слова:* операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями, инвариантные операторы, реализация Крейна, кратность нулевого собственного значения

DOI: 10.31857/S2686954324020061, EDN: XIVXOS

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Хорошо известно (см. [1, 2]), что положительный спектр оператора Шрёдингера  $-\Delta + q$  в  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $n = 2, 3$ , с убывающим потенциалом  $q(x) = O(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , чисто абсолютно непрерывен. Однако, оператор  $-\Delta + q$  может иметь (вложенное) нулевое собственное значение. Этот эффект для случая рациональных

потенциалов  $q(x_1, x_2)$  обнаружен Таймановым и Царевым в [3] и [4], использовавшим для этого преобразование Мутара.

Для оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями,

$$-\Delta + \sum_{j=1}^m \alpha_j \delta(x - x_j), \quad (1)$$

этот эффект обнаружен Гриневичем и Новиковым в [5].

Напомним, что согласно [6] под оператором Шрёдингера с точечными взаимодействиями  $X = \{x_j\}_1^m \subset \mathbb{R}^3$  понимают любую реализацию (самосопряжённое расширение)  $\mathbf{H}_B$  трёхмерного оператора Лапласа в  $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ , суженного на область:

<sup>1</sup> Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия

\*E-mail: malamud3m@gmail.com

\*\*E-mail: wmarchenko@rambler.ru

$$\mathbf{H} = -\Delta \operatorname{dom}(-\Delta_X),$$

$$\operatorname{dom}(-\Delta_X) := \left\{ \begin{array}{l} f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3) : f(x_j) = \\ = 0, j \in \{1, \dots, m\} \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Оператор (2) является замкнутым неотрицательным симметрическим оператором в  $\mathfrak{H}$  с индексами дефекта  $n_{\pm}(\mathbf{H}) = m$ . Изучению спектральных свойств расширений  $\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_B^*$  (реализаций) таких операторов посвящено большое число работ (см., например, [7, 8, 9, 10] и цитируемую там литературу). Так, хорошо известно, (см. [8, 9]), что положительный спектр каждой реализации  $\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_B^*$  чисто абсолютно непрерывен, а отрицательный – конечен. В частности, положительные собственные значения отсутствуют. Считая, что  $X = \{x_j\}_1^m \subset \mathbb{R}^3$  – множество вершин правильного многоугольника или многогранника, мы описали в [11] все реализации, инвариантные относительно группы симметрий множества  $X$ , включая все такие неотрицательные реализации.

В этой заметке мы продолжаем начатые в [11] исследования и описываем инвариантные реализации  $\mathbf{H}_B$  выражения (1) с нетривиальными ядрами  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ .

Впервые такие реализации  $\mathbf{H}_B$  для случая правильного  $m$ -угольника построены в [5]. Именно, в [5] доказано, что  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ , если  $m$

чётное,  $B = \alpha_0 I$ , и  $\alpha_0 = -\sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j}{|x_j - x_1|}$ . Более

того, в [5] высказана и проверена для чётных  $m \leq 96$  гипотеза о том, что кратность нулевого собственного значения оператора  $\mathbf{H}_B$  равна единице.

Здесь мы исследуем эту задачу в рамках теории расширений оператора  $H$ , применяя аппарат граничных троек и соответствующих функций Вейля (см. определения в § 1). При этом даётся полное решение задачи, поставленной в [5]. Кроме того, мы дополняем результаты из [5], описав при чётном  $m$  все  $B = \alpha I$ , для которых  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ , и доказав, что  $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = 2$  при  $\alpha \neq \alpha_0$  (теорема 1). При нечётном  $m$  также описаны все  $\alpha$ , для которых реализации  $\mathbf{H}_B$  с  $B = \alpha I$  имеют нетривиальные ядра, и показано, что эти ядра двумерны (теорема 2).

Нами также описаны инвариантные реализации  $\mathbf{H}_B$  с ненулевым  $\ker \mathbf{H}_B$  и матрицей  $B$  общего вида (теорема 3). Любопытно, что рас-

смотрение таких реализаций приводит к новым эффектам. Так, мы описываем все реализации с максимально возможной кратностью:  $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = m - 1$ . При этом среди них обязательно содержатся неотрицательные,  $\mathbf{H}_B \geq 0$ , и, в частности, наименьшая из них – крайневская  $\widehat{\mathbf{H}}_K (\geq 0)$ . Кроме того, при  $B \neq \alpha I$  возникают несамосопряжённые реализации  $\mathbf{H}_B (\Leftrightarrow B \neq B^*)$  с нетривиальными ядрами  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ .

## 2. ГРАНИЧНЫЕ ТРОЙКИ И ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ

Здесь мы, следуя [12, 13, 9, 14, 30], приводим основные понятия и факты теории граничных троек. Пусть  $A$  – симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$ , имеющий равные дефектные числа  $n_{\pm}(A) = n_{\pm}(A) \leq \infty$ .

**Определение 1.** Совокупность  $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ , в которой  $H$  – вспомогательное гильбертово пространство, а  $\Gamma_0, \Gamma_1 : \operatorname{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H}$  – линейные отображения, называют граничной тройкой оператора  $A^*$ , если

(i) имеет место следующая абстрактная формула Грина:

$$\begin{aligned} (A^* f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^* g)_{\mathfrak{H}} &= \\ &= (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$f, g \in \operatorname{dom}(A^*);$$

(ii) отображение  $\Gamma := (\Gamma_0, \Gamma_1)^T : \operatorname{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  сюръективно.

**Определение 2.** Расширение  $\tilde{A} \supset A$  называют собственным, если  $A \subset \tilde{A} \subset A^*$ .

**Предложение 1.** [13] Пусть  $A$  – симметрический оператор в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  с индексами дефекта  $n_{\pm}(A) = m$ ,  $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  – граничная тройка оператора  $A^*$ . Тогда отображение

$$B \rightarrow A_B = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0) \quad (4)$$

задаёт биективное соответствие между множеством  $\mathcal{S}(H)$  замкнутых линейных операторов  $B$  в  $\mathcal{H}$  и множеством замкнутых собственных расширений  $A_B$  оператора  $A$ , дизъюнктных с  $A_0 := A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0)$ , т. е. таких, что  $\operatorname{dom} A_B \cap \operatorname{dom} A_0 = \operatorname{dom} A$ .

**Определение 3.** [13] Пусть  $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  – граничная тройка для  $A^*$ . Оператор-функцию  $M(\cdot)$ , определяемую равенством

$$M(z)\Gamma_0 f = \Gamma_1 f, \text{ где } f \in \mathfrak{N}_z = \ker(A^* - zI), \quad (5)$$

называют функцией Вейля, соответствующей тройке  $\Pi$ .

### 3. ТРЁХМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЁДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

**Предложение 2.** [9] Пусть  $\mathbf{H}$  – минимальный оператор Шрёдингера (2) и пусть  $\xi_0 := \{\xi_{0j}\}_{j=1}^m, \xi_1 := \{\xi_{1j}\}_{j=1}^m \in \mathbb{C}^m$ . Тогда верны следующие утверждения.

(i) Оператор  $\mathbf{H}$  – замкнутый и симметрический с индексами дефекта  $n_{\pm}(\mathbf{H}) = m$ .

(ii) Сопряжённый оператор  $\mathbf{H}^*$  задаётся соотношениями

$$\text{dom}(\mathbf{H}^*) = \left\{ f = \sum_{j=1}^m \left( \xi_{0j} \frac{e^{-|x-x_j|}}{|x-x_j|} + \xi_{1j} e^{-|x-x_j|} \right) + f_H : \xi_0, \xi_1 \in \mathbb{C}^m, f_H \in \text{dom}(\mathbf{H}) \right\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}^* f = - \sum_{j=1}^m \left( \xi_{0j} \frac{e^{-|x-x_j|}}{|x-x_j|} + \xi_{1j} \left( e^{-|x-x_j|} - \frac{2e^{-|x-x_j|}}{|x-x_j|} \right) \right) - \Delta f_H. \quad (7)$$

(iii) Совокупность  $\Pi = \{\mathbf{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ , в которой

$$\mathbf{H} = \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0 f := \left\{ \Gamma_{0j} f \right\}_{j=1}^m = 4\pi \left\{ \lim_{x \rightarrow x_j} f(x) |x - x_j| \right\}_{j=1}^m = 4\pi \{ \xi_{0j} \}_{j=1}^m, \quad (8)$$

$$\Gamma_1 f := \left\{ \Gamma_{1j} f \right\}_{j=1}^m = \left\{ \lim_{x \rightarrow x_j} \left( f(x) - \frac{\xi_{0j}}{|x-x_j|} \right) \right\}_{j=1}^m, \quad (9)$$

образует граничную тройку для оператора  $\mathbf{H}^*$ .

(iv) соответствующая функция Вейля  $M(\cdot)$  имеет вид

$$M(z) = \left( \frac{i\sqrt{z}}{4\pi} \delta_{jk} + \tilde{G}\sqrt{z}(x_j - x_k) \right)_{j,k=1}^m, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (10)$$

$$\text{где } \tilde{G}\sqrt{z}(x) = \begin{cases} \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{4\pi|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \text{ Здесь } \delta_{jk} \text{ – символ}$$

Кронекера, а  $\sqrt{\cdot}$  – ветвь корня, определённая в  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  условием  $\sqrt{1} = 1$ ;

(v) существует сильный предел  $M(0) := s\text{-}\lim_{z \uparrow 0} M(z)$  в  $\mathbb{C}^m$  и  $M(0) = M(0)^*$ ;

(vi)  $\mathbf{H}_0 := \mathbf{H}^* \upharpoonright \ker \Gamma_0 = \widehat{\mathbf{H}}_F = -\Delta$  совпадает с фридриховым (наибольшим положительным) расширением оператора  $\mathbf{H}$ . Кроме того,  $\mathbf{H}_{M(0)} = \mathbf{H}^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - M(0)\Gamma_0) = \widehat{\mathbf{H}}_K$  – крайновское (наименьшее положительное) расширение  $\mathbf{H}$ .

**Замечание 1.** Реализация  $\mathbf{H}_B$ , соответствующая выражению (1), в граничной тройке (8)–(9) задаётся равенством (4) с диагональной матрицей  $B = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ .

### 4. ИНВАРИАНТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

**Определение 4.** Пусть  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  – некоторое движение пространства  $\mathbb{R}^3$ , сохраняющее множество  $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^3$ . Будем называть его симметрией множества  $X$ . Пусть оператор  $U : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$  определён равенством

$$Uf(x) = f(u(x)), \quad (11)$$

Оператор  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  называют инвариантным относительно симметрии  $u$ , если  $U\text{dom}(A) = \text{dom}(A)$  и выполнено равенство  $AU = UA$ .

Если это равенство выполнено для всех симметрий  $u$  множества  $X$ , то говорят, что  $A$  инвариантен относительно группы  $S_X$  всех симметрий множества  $X$ .

Легко видеть, что  $\mathbf{H}$  инвариантен относительно любой симметрии множества  $X$ .

### 5. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В случае если  $X$  – множество вершин правильного  $m$ -угольника, множество реализаций  $\mathbf{H}_B$  оператора  $\mathbf{H}$ , инвариантных относительно

группы  $D_m$  всех симметрий  $X$ , параметризуется (см. [11]) циркулянтными матрицами  $B$  вида

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & \dots & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & a_5 & a_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (12)$$

Матрица (12) является тѐплицевой и симметрической, а элементы  $a_1, a_2, \dots, a_m$  её первой строки связаны соотношениями  $a_{j+1} = a_{m-j+1}$  для всех  $j \in \{1, \dots, m-1\}$ .

В случае правильного  $m$ -угольника функция Вейля  $M(\cdot)$  имеет ту же структуру, что и матрица (12):

$$M(z) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} i\sqrt{z} & \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & \frac{e^{ir_2\sqrt{z}}}{r_2} & \dots & \frac{e^{ir_2\sqrt{z}}}{r_2} & \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} \\ \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & i\sqrt{z} & \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & \dots & \frac{e^{ir_3\sqrt{z}}}{r_3} & \frac{e^{ir_2\sqrt{z}}}{r_2} \\ e^{ir_2\sqrt{z}} & \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & i\sqrt{z} & \dots & \frac{e^{ir_4\sqrt{z}}}{r_4} & \frac{e^{ir_3\sqrt{z}}}{r_3} \\ r_2 & r_1 & i\sqrt{z} & \dots & r_4 & r_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{ir_1\sqrt{z}} & \frac{e^{ir_2\sqrt{z}}}{r_2} & \frac{e^{ir_3\sqrt{z}}}{r_3} & \dots & \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & i\sqrt{z} \end{pmatrix}, \quad r_j = |x_{j+1} - x_1|. \quad (13)$$

Здесь мы изучаем реализации оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями (1)  $\mathbf{H}_B (= \mathbf{H}_B^*)$ , задаваемые в граничной тройке (8) – (9), равенством (4) с граничными скалярными матрицами вида  $B = \alpha I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Наш первый результат дополняет результат Гриневича – Новикова из [5].

**Теорема 1.** Пусть  $m = 2l$  и  $H_B$  – реализация, задаваемая матрицей  $B = \alpha I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Тогда:

(i)  $\mathbf{H}_B$  имеет нулевое собственное значение в точности тогда, когда  $\alpha$  равно одному из чисел

$$\alpha_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{e^{\frac{2ij\pi k}{m}}}{r_j} = \bar{\alpha}_k, \quad k \in \{1, \dots, l\};$$

(ii) При этом для  $B_k = \alpha_k I$  выполнено:  $\dim(\ker \mathbf{H}_{B_k}) = 2$  при  $k \neq l$  и  $\dim(\ker \mathbf{H}_{B_l}) = 1$ ;

(iii) Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_k^\pm(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \frac{e^{\pm \frac{2ij\pi k}{m}}}{|x - x_j|}, \quad k \in \{1, \dots, l\}. \quad (14)$$

**Замечание 2.** В работе [5] (пример 2) рассматривается случай правильного  $m$ -угольника в случае чѐтного  $m$  с вершинами в точках  $\{x_j\}_1^m$ . Именно, там изучается реализация  $\mathbf{H}_B$  с матрицей

$B = \beta_0 I$  при  $\beta_0 = -\sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j}{|x_j - x_1|}$  и доказано, что

$\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ . Там же высказана гипотеза о том, что  $\dim \ker \mathbf{H}_B = 1$  при всех  $m \geq 2$ , и указано, что она проверена при  $2 \leq m \leq 96$ . Так как  $\beta_0 = \alpha_l$ , то при  $k = l = \frac{m}{2}$  теорема 1 подтверждает справедливость указанной гипотезы.

Более того, теорема 1, показывая, что для остальных реализаций  $\mathbf{H}_{B_k}$  с нетривиальным ядром  $\dim \ker \mathbf{H}_{B_k} = 2$ , демонстрирует исключительность реализации  $\mathbf{H}_{B_l}$ , исследованной в [5].

**Теорема 2.** Пусть  $m = 2l + 1$  и реализация  $\mathbf{H}_B$  определяется матрицей  $B = \alpha I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Тогда:

(i)  $H_B$  имеет нулевое собственное значение в точности тогда, когда  $\alpha$  равно одному из чисел

$$\alpha_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{e^{\frac{2ij\pi k}{m}}}{r_j} = \bar{\alpha}_k, \quad k \in \{1, \dots, l\}.$$

(ii) При этом  $\dim(\ker \mathbf{H}_{B_k}) = 2$ , а соответствующие собственные функции равны

$$\psi_k^\pm(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \frac{e^{\pm \frac{2ij\pi k}{m}}}{|x - x_j|}, \quad k \in \{1, \dots, l\}. \quad (15)$$

Укажем зависящий от  $k$  порядок убывания на бесконечности собственных функций (14), (15).

**Предложение 3.** Пусть  $l = \frac{m}{2}$  при чётном  $m$  и  $l = \frac{m-1}{2}$  при нечётном  $m$ . При каждом  $k \in \{1, \dots, l\}$  для собственные функции (14) и (15) имеет место оценка

$$\psi_k^\pm(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{k+1}}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Это предложение обобщает формулу (20) из [5] и совпадает с ней при  $k = l = \frac{m}{2}$ .

### 6. ОБЩИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

Здесь мы приведем описание всех инвариантных реализаций  $\mathbf{H}_B$ , имеющих ненулевое ядро  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ . Подчеркнем, что граничные матрицы  $B$  здесь пробегают совокупность всех матриц вида (12), а не только скалярных  $B = \alpha I_m$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\mathbf{H}_B$  — реализация, определяемая матрицей  $B$  вида (12). Тогда:

(i)  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$  в точности тогда, когда выполнено одно из условий:

$$a_1 = -\sum_{j=1}^{m-1} \left( a_{j+1} - \frac{1}{4\pi r_j} \right) e^{\frac{2ij\pi k}{m}}, \quad k \in \{1, \dots, l\}, \quad (17)$$

в которых числа  $a_1, \dots, a_m$  связаны соотношениями

$$a_{m-j} = a_{j+2} \quad \text{где } j \in \{0, \dots, m-2\}.$$

(ii) При этом подпространство  $\ker \mathbf{H}_B$  порождено собственными функциями вида (14), (15) (в зависимости от четности) и удовлетворяющими оценке (16).

(iii) Нулевое собственное значение оператора  $\mathbf{H}_B$  имеет максимальную кратность, если и только если выполнены все  $l$  условий (17). Это имеет место в точности тогда, когда  $a_{j+1} = a_1 + \frac{1}{4\pi r_j}$  для всех  $j \in \{1, \dots, m-1\}$ .

В следующей теореме приводится явное описание всех инвариантных реализаций  $\mathbf{H}_B$ , имеющих максимальную кратность нулевого собственного значения.

**Теорема 4.** Пусть  $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $M(\cdot)$  — соответствующая функция Вейля вида (13). Пусть также

$E_m \in (\mathbb{R}^{m \times m})$  — матрица, все элементы которой равны 1. Тогда:

(i) Размерность ядра  $\ker \mathbf{H}_B$  каждой инвариантной реализации  $\mathbf{H}_B$ , определяемой матрицей  $B$  вида (12), не превосходит  $m-1$ , т. е.  $\dim(\ker \mathbf{H}_B) \leq m-1$ ;

(ii) Кратность нулевого собственного значения реализации  $\mathbf{H}_B$  максимальна, т. е.

$$\dim(\ker \mathbf{H}_B) = m-1, \quad (18)$$

тогда и только тогда, когда матрица  $B$  имеет вид

$$B = B(a) := aE_m + M(0), \quad a \in \mathbb{C};$$

(iii)  $\mathbf{H}_{B(a)} = \mathbf{H}_{B(a)}^*$  и обладает свойством (18) в точности тогда, когда  $a \in \mathbb{R}$ ;

(iv)  $\mathbf{H}_{B(a)} \geq 0$  и обладает свойством (18) в точности тогда, когда  $a \geq 0$ ;

(v) В частности, при  $a = 0$  расширение  $\mathbf{H}_{B(0)} = \mathbf{H}_{M(0)} = \widehat{\mathbf{H}}_K (\geq 0)$  является крайновским (наименьшим положительным) и обладает свойством (18).

### 7. ОБЩИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

В случаях  $m = 3, m = 4$  для инвариантных реализаций  $\mathbf{H}_B$  мы описываем все возможные размерности ядер  $\ker \mathbf{H}_B$ .

Пусть  $m = 3$ , а  $B$  — произвольная граничная матрица вида (12), порождающая инвариантное относительно  $D_3$  расширение  $\mathbf{H}_B$ , т. е.

$$B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}. \quad (19)$$

**Теорема 5.** Реализация  $\mathbf{H}_B$  с граничной матрицей  $B$  вида (19) имеет ненулевое ядро  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$  в точности тогда, когда  $a - b = -\frac{1}{4\pi r}$ , где  $r$  — сторона треугольника.

При этом  $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = 2$ , а соответствующие собственные функции равны

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|x-x_1|} - \frac{1}{|x-x_2|} \right), \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|x-x_1|} - \frac{1}{|x-x_3|} \right). \end{aligned}$$

## 8. ОБЩИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ КВАДРАТА.

Рассмотрим случай  $m = 4$ . Матрица  $B$ , определяющая инвариантное относительно  $D_4$  расширение  $\mathbf{H}_B$ , имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}. \quad (20)$$

**Теорема 6.** Реализация  $\mathbf{H}_B$  с граничной матрицей  $B$  вида (20) имеет ненулевое ядро  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$  в точности тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(i) \quad a - c = -\frac{1}{4\pi r_2},$$

$$(ii) \quad a - 2b + c = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

где  $r_1$  — сторона,  $a$   $r_2$  — диагональ квадрата. При этом

$$\dim(\ker \mathbf{H}_B) = \begin{cases} 1, & \text{если выполнено (ii), но нарушено (i);} \\ 2, & \text{если выполнено (i), но нарушено (ii);} \\ 3, & \text{если выполнены оба условия (i) и (ii).} \end{cases}$$

Соответствующие собственные функции равны

$$\psi_1(x) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|x - x_1|} - \frac{1}{|x - x_3|} \right),$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|x - x_2|} - \frac{1}{|x - x_4|} \right),$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|x - x_1|} - \frac{1}{|x - x_2|} + \frac{1}{|x - x_3|} - \frac{1}{|x - x_4|} \right).$$

**Замечание 3.** Подчеркнем, что элементы матриц  $B$  в теоремах 5 и 6 комплексны. Поэтому матрицы  $B$  и, значит, порождаемые ими реализации  $\mathbf{H}_B$  со свойством  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$  не обязательно самосопряжённые. Но для скалярных матриц  $B = \alpha I$ , условие  $\alpha \in \mathbb{R}$ , т. е. условие  $B = B^*$ , необходимо для свойства  $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ .

Из-за недостатка места мы опускаем описание аналогичных результатов для правильных многогранников в  $\mathbb{R}^3$ . Эти результаты планируются опубликовать в другой работе.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования первого автора выполнены за счёт гранта Российского научного фонда №23-11-00153.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
2. Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики. Т. 3. М.: Мир, 1982. 443 с.
3. Тайманов И.А., Царев С.П. Двумерные операторы Шрёдингера с быстро убывающим рациональным потенциалом и многомерным  $L_2$ -ядром // УМН. 2007. Т. 62. № 3 (375). С. 217–218.
4. Тайманов И.А., Царев С.П. Двумерные рациональные солитоны, построенные с помощью преобразований Мутара, и их распад // ТМФ. 2008. Т. 157. № 3. С. 188–207.
5. Гриневич П.Г., Новиков Р.Г. Многоточечные рассеиватели со связанными состояниями при нулевой энергии // ТМФ. 2017. Т. 193. № 2. С. 309–314.
6. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
7. Гриневич П.Г., Новиков Р.Г. Спектральное неравенство для уравнения Шрёдингера с многоточечным потенциалом // УМН. 2022. Т. 77. № 6 (468). С. 69–76.
8. Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics: texts and monographs in Physics. Berlin–New York: Springer, 1988. 452 p.
9. Goloschapova N., Malamud M., Zastavnyi V. Radial Positive definite functions and spectral theory of Schrödinger operators with point interactions // Math. Nachr. 2012. V. 285. N 14–15. P. 1839–1859.
10. Malamud M.M., Schmudgen K. Spectral theory of Schrödinger operators with infinitely many point interactions and radial positive definite functions // J. Funct. Anal. 2012. N 263 (10). P. 3144–3194.
11. Маламуд М.М., Марченко В.В. Инвариантные операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями в вершинах правильного многогранника // Матем. заметки. 2021. Т. 110. № 3. С. 471–477.
12. Деркач В.О., Маламуд М.М. Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи. Киев, 2017. 612 с.
13. Derkach V.A., Malamud M.M. Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. 1991. N 95. P. 1–95.
14. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений, Киев: Наукова думка, 1984. 284 с.
15. Schmüdgen K. Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space. Dordrecht–Heidelberg–New York–London: Springer, 2012.

# ON KERNELS OF INVARIANT SCHRÖDINGER OPERATORS WITH POINT INTERACTIONS. GRINEVICH–NOVIKOV PROBLEM

M. M. Malamud<sup>a, \*</sup>, V. V. Marchenko<sup>b, \*\*</sup>

<sup>a</sup>*RUDN University, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS I.A. Taimanov

According to Berezin and Faddeev, a Schrödinger operator with point interactions

$$-\Delta + \sum_{j=1}^m \alpha_j \delta(x - x_j), \quad X = \{x_j\}_1^m \subset \mathbb{R}^3, \quad \{\alpha_j\}_1^m \subset \mathbb{R},$$

is any self-adjoint extension of the restriction  $-\Delta_X$  of the Laplace operator  $-\Delta$  to the subset  $\{f \in H^2(\mathbb{R}^3) : f(x_j) = 0, 1 \leq j \leq m\}$  of the Sobolev space  $H^2(\mathbb{R}^3)$ . The present paper studies the extensions (realizations) invariant under the symmetry group of the vertex set  $X = \{x_j\}_1^m$  of a regular  $m$ -gon. Such realizations  $\mathbf{H}_B$  are parametrized by special circulant matrices  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . We describe all such realizations with non-trivial kernels. A Grinevich–Novikov conjecture on simplicity of a zero eigenvalue of the realization  $\mathbf{H}_B$  with a scalar matrix  $B = \alpha I$  and an even  $m$  is proved. It is shown that for an odd  $m$  non-trivial kernels of all the realizations  $\mathbf{H}_B$  with scalar  $B = \alpha I$  are two-dimensional. Besides, for arbitrary realizations ( $B \neq \alpha I$ ) the estimate  $\dim(\ker \mathbf{H}_B) \leq m - 1$  is proved, and all the invariant realizations of the maximal dimension  $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = m - 1$  are described. One of them is the Krein realization, which is the minimal positive extension of the operator  $-\Delta_X$ .

*Keywords:* Schrödinger operators with point interactions, invariant operators, Krein realization, multiplicity of zero eigenvalue

УДК 510.649, 510.24

## СОВМЕСТНАЯ ЛОГИКА ЗАДАЧ И ВЫСКАЗЫВАНИЙ

© 2024 г. С. А. Мелихов<sup>1, \*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семёновым

Поступило 21.07.2023 г.

После доработки 09.02.2024 г.

Принято к публикации 25.03.2024 г.

В комментарии 1985 г. к своему собранию сочинений А. Н. Колмогоров сообщил, что его статья *К толкованию интуиционистской логики* 1932 г. “писалась в надежде на то, что логика решения задач [т.е. интуиционистская логика] сделается со временем постоянным разделом курса логики. Предполагалось создание единого логического аппарата, имеющего дело с объектами двух типов — высказываниями и задачами”. Ниже построена подобная формальная система, а также её предикатная версия QHC, являющаяся консервативным расширением как интуиционистского предикатного исчисления QH, так и классического предикатного исчисления QC. Аксиоматика логики QHC является результатом одновременной формализации двух известных альтернативных толкований интуиционистской логики: 1) задачной интерпретации Колмогорова (с известными уточнениями Гейтинга и Крайзеля) и 2) доказательной интерпретации Орлова и Гейтинга, прояснённой и расширенной Гёделем.

*Ключевые слова:* интуиционистская логика, ВНК-интерпретация, формальная металогики

**DOI:** 10.31857/S2686954324020077, **EDN:** XIUPWR

Настоящая заметка — краткое сообщение о препринтах автора [1], [2], имеющее своей целью более доступное изложение их основных идей и результатов.

### 1. ЧТО ТАКОЕ ЛОГИКА (ФОРМАЛЬНО)?

С точки зрения современных учебников системе вывода логики первого порядка полагается состоять из схем аксиом и правил вывода, где и те, и другие используют метапеременные (а не переменные языка) и могут включать в себя условия, выраженные словами, такие как “при условии, что  $x$  не свободна в  $P$ ” или “при условии, что  $t$  свободен для  $x$  в  $P(x)$ ”. В старых учебниках Гильберта–Аккермана, Гильберта–Бернайса и П.С. Новикова система вывода содержала только отдельные аксиомы (т.е. формулы, а не схемы), но правила вывода всё равно использовали метапеременные и включали в себя вербальные условия.

Мы будем использовать третий тип формализма, в котором вся система вывода является

объектом некоторого формального языка (называемого языком металогики). Этот формализм — упрощённая версия формальной металогики Полсона [3], используемой в Isabelle (известной программе для работы с доказательствами). При таком подходе принципы и правила не содержат ни метапеременных, ни вербальных условий, так что они оказываются вполне формальными синтаксическими объектами, и поэтому имеет смысл говорить об их семантике. Метапеременные и вербальные условия не исчезают полностью: они присутствуют в метаправилах вывода, которые одинаковы для всех логик первого порядка.

Коротко опишем нашу версию этого формализма (ср. [1], [4]). Пусть дан язык  $\mathcal{L}$  логики первого порядка, включая понятие формулы языка  $\mathcal{L}$ . Нам нужно, чтобы  $\mathcal{L}$  содержал предикатные переменные (как в учебниках А. Чёрча, Гильберта–Аккермана, Гильберта–Бернайса и П.С. Новикова), а не только предикатные константы, как в некоторых современных учебниках (которые, тем не менее, как правило используют пропозициональные переменные в своих изложениях пропозициональной логики). Естественное место для предикатных констант тогда — не в языке  $\mathcal{L}$ , а в языке теории над этой логикой.

<sup>1</sup> Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

\*E-mail: melikhov@mi-ras.ru

*Метаформулы* строятся индуктивно из формул с помощью *метаконъюнкции*  $\&$ , *мета-импликации*  $\Rightarrow$  и *метакванторов* всеобщности по любому индивидуальным и предикатным переменным языка  $\mathcal{L}$ . Метаквантификацию по всем индивидуальным переменным, встречающимся свободно в заданной метаформуле  $\mathcal{F}$ , будем записывать сокращённо в виде  $(1)\mathcal{F}$ ; а по всем предикатным переменным (любой валентности), встречающимся свободно в  $\mathcal{F}$  – в виде  $(2)\mathcal{F}$ .

*Правило*  $F_1, \dots, F_m / G$ , где  $F_1, \dots, F_m$  и  $G$  – формулы, является сокращённой записью метаформулы  $(2)((1)F_1 \& \dots \& (1)F_m \Rightarrow (1)G)$ . *Принцип*  $\cdot G$ , где  $G$  – формула, является сокращённой записью метаформулы  $(2)(1)G$ . Таким образом, правила без посылок можно отождествить с принципами.

*Система вывода*  $\mathcal{D}$  – это метаконъюнкция конечного числа принципов и правил, называемых её *законами*<sup>1</sup> и *правилами вывода*. Другая система вывода  $\mathcal{D}'$  (в том же языке) *эквивалентна* системе  $\mathcal{D}$ , если метаформула  $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}') \& (\mathcal{D}' \Rightarrow \mathcal{D})$  выводима с помощью метаправил вывода. (Последние представляют собой правила введения и удаления для  $\&$ ,  $\Rightarrow$  и метакванторов, в стиле натурального вывода, а также правило  $\alpha$ -конверсии. Подробности см. в [1] или [4]; примеры работы с метаправилами см. в [4].)

*Логика* – это класс эквивалентности систем вывода. Если  $L$  – логика, заданная системой вывода  $\mathcal{D}$ , обозначим через  $\vdash_L \mathcal{F}$  (или просто  $\vdash \mathcal{F}$ , если  $L$  ясна из контекста) суждение, что метаформула  $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{F}$  выводима с помощью метаправил вывода. Суждение  $\vdash (F_1 \& \dots \& F_m) \Rightarrow G$  будем записывать сокращённо в виде  $F_1, \dots, F_m \vdash G$ . В случае, когда  $F_1, \dots, F_m$  и  $G$  являются формулами, “ $F_1, \dots, F_m \vdash G$ ” имеет тот же смысл, что и в учебниках А. Чёрча, Г. Б. Эндертон, Колмогорова–Драгиалина и Трулстры–ван Далена. С другой стороны, “ $F_1, \dots, F_m \vdash G$ ”, будучи определённым как в учебниках Д. Шёнфилда и Э. Мендельсона, имеет значение  $(1)F_1, \dots, (1)F_m \vdash (1)G$ . Последнее отношение на наборах формул определяет выводимость правил, а значит, и логику.

Будем говорить, что правила  $R_1, \dots, R_n$  *влекут* правило  $Q$ , если верно суждение  $R_1, \dots, R_n \vdash Q$ . Например, в интуиционистской логике прин-

цип  $\cdot \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$  влечёт принцип  $\cdot \alpha \vee \neg\alpha$ , что легко усмотреть, используя  $\vdash \cdot \neg\neg(\beta \vee \neg\beta)$ . Однако  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \not\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ , так как посылка становится выводимой при замене  $\alpha$  на  $\neg\beta$ , а заключение – нет. (В рамках традиционного формализма здесь можно было бы сказать, что схема  $\alpha \vee \neg\alpha$  невыводима из схемы  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ ; это свидетельствует о том, что традиционное представление принципов схемами иногда приводит к недоразумениям.)

## 2. ЧТО ТАКОЕ ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА (НЕФОРМАЛЬНО)?

При построении новой логики для начала нужно обратиться к неформальным рассуждениям – иначе возникает риск прийти к “неправильной” (т.е. немотивированной) логике. Наша логика QHC возникнет естественным образом из анализа семантики интуиционистской логики.

### 2.1. Задачная интерпретация

Идея Колмогорова состояла в том, что объекты интуиционистской логики “суть в действительности не теоретические высказывания, а, напротив, задачи”. Далее описана немного уточнённая форма его толкования интуиционистской логики [6], включающая небольшие усовершенствования, привнесённые А. Гейтингом (1934). Более подробное обсуждение см. в [4; § 3.7, § 3.8].

Рассмотрим класс конкретных задач (например, задачи на построение циркулем и линейкой), которые могут содержать параметры, пробегающие фиксированную область  $D$ . Смысл задач, содержащих логические связки или кванторы, разъясняется следующим образом:

- решение задачи  $\Gamma \wedge \Delta$  состоит из решения  $\Gamma$  и решения  $\Delta$ ;
- решение задачи  $\Gamma \vee \Delta$  состоит из явного выбора между  $\Gamma$  и  $\Delta$  и решения выбранной задачи;
- решение задачи  $\Gamma \rightarrow \Delta$  – это *сведение*  $\Delta$  к  $\Gamma$ , т.е. общий метод решения  $\Delta$  на основе любого заданного решения  $\Gamma$ ;
- задача  $\times$  (“*абсурд*”) не имеет решений, а  $\neg\Gamma$  – сокращённая запись для  $\Gamma \rightarrow \times$ ;
- решение задачи  $\exists x\Theta(x)$  – это решение  $\Theta(x_0)$  для некоторого явно выбранного  $x_0 \in D$ ;
- решение задачи  $\forall x\Theta(x)$  – это общий метод решения  $\Theta(x_0)$  при каждом  $x_0 \in D$ .

<sup>1</sup> Законы играют ту же роль, что и схемы аксиом, но формально не являются ни схемами аксиом, ни отдельными аксиомами.

Здесь ключевым элементом является понятие *общего метода*, которое Колмогоров разъясняет следующим образом. Если  $\Gamma(\mathcal{A})$  – задача, зависящая от параметра  $\mathcal{A}$  “произвольного сорта”, то “указать общий метод решения задачи  $\Gamma(\mathcal{A})$  при каждом конкретном значении  $\mathcal{A}$ ” следует понимать как “быть в состоянии для каждого заданного единичного значения  $\mathcal{A}_0$  переменной  $\mathcal{A}$  решить задачу  $\Gamma(\mathcal{A}_0)$  посредством конечной последовательности заранее (до выбора этого  $\mathcal{A}_0$ ) известных шагов”.

Как отмечается в учебнике Трулстры–ван Далена (Troelstra–van Dalen), приведённых выше шести положений недостаточно, чтобы отличить интуиционистскую логику от классической. Действительно, если  $|\Gamma|$  обозначает множество решений задачи  $\Gamma$ , то эти положения гарантируют, что:

- $|\Gamma \wedge \Delta|$  есть произведение  $|\Gamma| \times |\Delta|$ ;
- $|\Gamma \vee \Delta|$  есть дизъюнктивное объединение  $|\Gamma| \sqcup |\Delta|$ ;
- имеется отображение  $\mathcal{F}: |\Gamma \rightarrow \Delta| \rightarrow \text{Hom}(|\Gamma|, |\Delta|)$  во множество всех отображений;
- $|\times| = \emptyset$ ;
- $|\exists x \Theta(x)|$  есть дизъюнктивное объединение  $\coprod_{d \in D} |\Theta(d)|$ ;
- имеется отображение  $\mathcal{G}: |\forall x \Theta(x)| \rightarrow \prod_{d \in D} |\Theta(d)|$  в произведение.

Если отображение  $\mathcal{F}$  сделать тождественным, получится классическая логика. Действительно,  $|\Gamma \vee \neg \Gamma| = |\Gamma| \sqcup \text{Hom}(|\Gamma|, \emptyset)$  всегда непусто; значит,  $\Gamma \vee \neg \Gamma$  имеет решение для любой задачи  $\Gamma$ .

Ингредиент, которого здесь не хватает – это следующая интерпретация *метаквантора* второго порядка, которая, к сожалению, не обсуждается ни в каких учебниках, но почти в явном виде присутствует в статье Колмогорова [6]. Если  $\Phi = \Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  – формула, не содержащая предикатных переменных кроме уже перечисленных, то принцип  $\cdot \Phi$  интерпретируется как задача “найти общий метод решения задачи  $\Phi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  для любых конкретных задач  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  подходящих валентностей”.

Например,  $\cdot \gamma \vee \neg \gamma$  интерпретируется как задача “найти общий метод, позволяющий для всякой конкретной задачи  $\Gamma$  либо решить  $\Gamma$ , либо прийти к противоречию исходя из предположения о том, что задано решение  $\Gamma$ ”. Такой

общий метод нам неизвестен, и именно поэтому *интуиционистская логика отлична от классической*.

Колмогоров также предложил интерпретацию правил, которая после некоторых уточнений (с целью отделения синтаксиса от семантики) применима к произвольным метаформулам [4].

## 2.2. Доказуемая интерпретация

Немного другая интерпретация интуиционистской логики была предложена И. Е. Орловым (1928) и независимо А. Гейтингом (1930, 31). Для них объектами интуиционистской логики служат не задачи, а утверждения о конструктивной *доказуемости* высказываний. Более подробное обсуждение см. в [1; § 6.2.1].

К. Гёделю удалось формализовать эту интерпретацию в его переводе пропозициональной интуиционистской логики в логику  $S4$  (1933; недоработанная версия этого перевода имеется уже в статье Орлова). Позже, в наброске своей лекции 1938 года [7] Гёдель попытался аксиоматизировать также более точное понятие *доказательства* в смысле Орлова и Гейтинга; он говорит о доказательствах, “понимаемых не в какой-то конкретной системе, а в абсолютном смысле (то есть, [то, что] позволяет сделать [утверждение] очевидным)”.

В этом наброске Гёдель рассматривает тернарное отношение “ $zBp, q$ , то есть  $z$  – вывод  $q$  из  $p$ ”. Но в действительности он также использует бинарное отношение “ $aBq$ ”, которое, насколько можно судить, служит сокращением для  $aB\Gamma, q$ . Аксиомы Гёделя для  $B$  таковы (буквально):

- “ $zB\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ ”;
- “ $uBv \rightarrow u'B(uBv)$ ”;
- “ $zBp, q \ \& \ uBq, r \rightarrow f(z, u)Bp, r$ ”;
- “если  $q$  доказано и  $a$  – [предъявленное] доказательство, [то] пишется  $aBq$ ”.

Вместо того, чтобы пытаться прояснить смысл сказанного в исходных терминах Гёделя, рассмотрим очень похожую, но более чётко описанную логику. А именно, пусть  $S4pr$  – расширение классической логики предикатов следующими дополнительными элементами языка:

- оператор  $\cdot$ , сопоставляющий всяким формуле  $F$  и терму  $t$  формулу  $t : F$ ;
- унарная функция  $'$ , сопоставляющая всякому терму  $t$  терм  $t'$ ;

- бинарная функция  $[\ ]$ , сопоставляющая всяким двум термам  $s, t$  терм  $s[t]$ ;
- оператор  $*$ , сопоставляющий всякой формуле  $F$  терм  $*_F$

и следующими дополнительными законами и правилами вывода:<sup>2</sup>

- (1)  $\cdot t : p \rightarrow p$
- (2)  $\cdot t : p \rightarrow t' : (t : p)$
- (3)  $\cdot s : (p \rightarrow q) \rightarrow (t : p \rightarrow s[t] : q)$
- (4)  $\frac{p}{p}^*$

Нам понадобится

**Предложение 2.1.** *В логике  $S4pr$  выводимы следующие принципы и правила:*

- (1')  $\cdot \neg(t : \perp)$
- (1'')  $\cdot \exists t t : p \rightarrow p$
- (1''')  $\frac{t : p}{p}$
- (2')  $\cdot t : p \rightarrow \tilde{t} : (\exists t t : p)$

### 2.3. Принцип Прокла–Крайзеля

Как мы увидим ниже, с некоторой формальной точки зрения задачная интерпретация Колмогорова–Гейтинга и доказуемая интерпретация Орлова–Гейтинга имеют много общего, но не сводятся друг к другу. Однако в литературе эти интерпретации традиционно отождествляют друг с другом (что нельзя назвать совсем нелогичным, поскольку в статье Гейтинга 1931 года содержатся элементы обеих). Результатом этого хронического смещения стала так называемая “ВНК–интерпретация” интуиционистской логики, изначально названная так в честь Брауэра, Гейтинга и Крайзеля, а позднее традиционно называемая точно так же уже в честь Брауэра, Гейтинга и Колмогорова.

Главным вкладом Г. Крайзеля было, в терминах задачной интерпретации, следующее наблюдение: для того, чтобы вышеупомянутые шесть положений имели смысл, к ним нужно добавить такую оговорку: “каждое решение задачи Г должно быть снабжено доказательством того, что оно действительно является её решением”. Более подробное обсуждение см. в [4; § 3.7]. На самом деле этот же принцип подчёркивали уже древние греки, в особенности Прокл, в контек-

<sup>2</sup> Близкую, но более сложную логику исследовал С. Артёмов [8].

сте задач на построение циркулем и линейкой. (А.П. Мартин-Лёф наоборот подчёркивал, что этот принцип не выполняется в его интуиционистской теории типов.)

## 3. ЛОГИКА QHC

В дальнейшем интуиционистская и классическая логики предикатов будут обозначаться как QH и QC. Сейчас мы займёмся построением новой логики QHC, подходящей под описание Колмогорова [5], цитированное в аннотации.

### 3.1. Язык

Язык логики QHC содержит:

- логические константы:
  - классические *истину* и *ложь*, обозначаемые как  $\top, \perp$ , и
  - их интуиционистские аналоги *тривиальность* и *абсурд*, обозначаемые как  $\checkmark, \times$ ;
- для каждого  $n \geq 0$  счётное множество  $n$ -местных предикатных переменных двух сортов:
  - *задачные переменные*, обозначаемые полужирными греческими буквами ( $\alpha, \beta, \dots$ );
  - *собственно-предикатные переменные*, обозначаемые полужирными латинскими буквами ( $p, q, \dots$ );
- счётное множество индивидуальных переменных, записываемые машинописным шрифтом:  $x, y, \dots$ ;
- классические и интуиционистские связки и кванторы (см. ниже);
- два новых оператора  $?$  и  $!$ .

Обычный математический шрифт будет использоваться для метапеременных.

Каждая формула логики QHC будет иметь один из двух сортов: она должна быть либо *c-формулой*, либо *i-формулой*. *Атомарной c-формулой* называется выражение вида  $p(x_1, \dots, x_n)$ , где  $p$  –  $n$ -местная собственно-предикатная переменная и  $x_1, \dots, x_n$  – индивидуальные переменные. *Атомарной i-формулой* называется выражение вида  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ , где  $\alpha$  –  $n$ -местная задачная переменная и  $x_1, \dots, x_n$  – индивидуальные переменные. Произвольная *c-формула* – это либо  $\top$ , либо  $\perp$ , либо атомарная *c-формула*, либо выражение вида  $\Phi$ , где  $\Phi$  – *i-формула*; либо выражение,

построенное индуктивно из выражений предыдущих четырёх типов с использованием классических связок  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$  и классических кванторов  $\exists, \forall$ . Произвольная *i*-формула — это либо  $\sqrt{\quad}$ , либо  $\times$ , либо атомарная *i*-формула, либо выражение вида  $F$ , где  $F$  — *s*-формула; либо выражение, построенное индуктивно из выражений предыдущих четырёх типов с использованием интуиционистских связок  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$  и интуиционистских кванторов  $\exists, \forall$ . При этом классические связки/кванторы и их интуиционистские аналоги на письме не различаются, но всегда не сложно выяснить, кто из них есть кто, поскольку сорт каждой подформулы, имеющей один из первых четырёх типов (из определений *s*-формулы и *i*-формулы) ясен из того, как она выглядит.

В дальнейшем мы будем обозначать *i*-формулы не допускающими различий греческими заглавными буквами, *s*-формулы — не допускающими различий латинскими заглавными буквами, а формулы логики QHC неизвестного сорта — заглавными буквами, которые с точки зрения являются и греческими, и латинскими (например,  $A, B, E$ ).

### 3.2. Неформальная семантика

Замкнутые *s*-формулы интерпретируются высказываниями, а замкнутые *i*-формулы — задачами. Подробнее:

- $n$ -местные собственно-предикатные переменные интерпретируются  $n$ -местными предикатами;
- $n$ -местные задачные переменные интерпретируются задачами с  $n$  параметрами;
- классические связки и кванторы интерпретируются как обычно, с помощью таблиц истинности;
- интуиционистские связки и кванторы интерпретируются как в § 2;
- если  $\Phi$  — *i*-формула, интерпретируемая задачей  $\Gamma$  с  $n$  параметрами, то  $? \Phi$  интерпретируется  $n$ -местным предикатом “ $\Gamma$  имеет решение”;
- если  $F$  — *s*-формула, интерпретируемая  $n$ -местным предикатом  $P$ , то  $!F$  интерпретируется задачей “доказать  $P$ ” с  $n$  параметрами.

Если  $F = F(\gamma_1, \dots, \gamma_m, p_1, \dots, p_n)$  — замкнутая *s*-формула, не содержащая предикатных переменных кроме уже перечисленных, то принцип  $\cdot F$  интерпретируется высказыванием “высказы-

вание  $F(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, P_1, \dots, P_n)$  выполнено для любых задач  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  и предикатов  $P_1, \dots, P_n$  подходящей валентности”. Суждение  $\vdash \cdot F$  может быть проинтерпретировано суждением об истинности этого высказывания.

Если  $\Phi = \Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_m, p_1, \dots, p_n)$  — замкнутая *i*-формула, не содержащая предикатных переменных кроме уже перечисленных, то принцип  $\cdot \Phi$  интерпретируется задачей “найти общий метод решения задачи  $\Phi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, P_1, \dots, P_n)$  для любых задач  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  и высказываний  $P_1, \dots, P_n$  подходящей валентности”. Суждение  $\vdash \cdot \Phi$  может быть проинтерпретировано суждением о том, что эта задача имеет решение.

Интерпретация правил и других метаформул более сложна; см. [2].

### 3.3. Система вывода

Некоторые законы и правила вывода логики QHC можно указать сразу:

- Все законы и правила вывода логики QC (см. [4; § 4.6]).
- Все законы и правила вывода логики QH (см. [4; § 4.6]).

Здесь формулы QC и QH отождествляются соответственно с *s*-формулами и *i*-формулами, не содержащими вхождений  $? \text{ и } !$ . Отметим, что, используя метаправила вывода (а именно, правила введения и удаления метакванторов второго порядка), мы можем применять классические законы и правила вывода к произвольным *s*-формулам, а интуиционистские законы и правила вывода — к произвольным *i*-формулам.

Обсудим теперь оставшуюся часть системы вывода.

Высказывание “ $\Gamma$  имеет решение”, обозначаемое как  $? \Gamma$ , может быть перефразировано в терминах § 2 как “ $\lceil \Gamma \rceil \neq \emptyset$ ”. Тогда из шести положений задачной интерпретации (см. § 2) следует, что для любых задач  $\Gamma, \Delta$  и любой задачи  $\Theta$  с параметром должны быть истинны следующие высказывания:

- $?(\Gamma \wedge \Delta) \leftrightarrow ?\Gamma \wedge ?\Delta$
- $?(\Gamma \vee \Delta) \leftrightarrow ?\Gamma \vee ?\Delta$
- $?(\Gamma \rightarrow \Delta) \rightarrow (? \Gamma \rightarrow ? \Delta)$
- $\neg ? \times$
- $? \exists x \Theta(x) \leftrightarrow \exists x ? \Theta(x)$
- $? \forall x \Theta(x) \rightarrow \forall x ? \Theta(x)$

Эти высказывания соответствуют следующим принципам в языке логики QHC:

- (1a)  $\cdot ?(\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow ?\gamma \wedge ?\delta$
- (1b)  $\cdot ?(\gamma \vee \delta) \leftrightarrow ?\gamma \vee ?\delta$
- (1c)  $\cdot ?(\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (? \gamma \rightarrow ? \delta)$
- (1d)  $\neg ? \times$
- (1e)  $\cdot ?\exists x \theta(x) \leftrightarrow \exists x ? \theta(x)$
- (1f)  $\cdot ?\forall x \theta(x) \rightarrow \forall x ? \theta(x)$

Это наша первая группа законов логики QHC (некоторые из них впоследствии окажутся избыточными).

Неформально, (1d) утверждает, что  $\times$  – не просто самая сложная задача (что гарантируется принципом “Ex falso quodlibet”,  $\cdot \times \rightarrow \gamma$ ), а задача, вообще не имеющая решения. Этот лишь один пример того, как задачная интерпретация не до конца формализуется логикой QH, но более полно формализуется логикой QHC.

Из принципа Прокла–Крайзеля следует, что всякое решение задачи  $\Gamma$  даёт доказательство существования решения задачи  $\Gamma$ . Этот более слабый принцип выразим в языке логики QHC, и мы добавляем его в систему вывода:

(1g)  $\cdot \gamma \rightarrow !? \gamma$ .

Заключительная часть системы вывода возникает из доказуемостной интерпретации. Принципы и правила (1'), (1''), (1'''), (2'), (3) и (4) из § 2, выводимые в S4<sub>pr</sub>, имеют следующие прямые аналоги в языке логики QHC:

- (2a)  $\cdot \neg ! \perp$
- (2b)  $\cdot ?! p \rightarrow p$
- (2c)  $\frac{!p}{p}$
- (2d)  $\cdot !p \rightarrow !?!p$
- (2e)  $\cdot !(p \rightarrow q) \rightarrow (!p \rightarrow !q)$
- (2f)  $\frac{p}{!p}$

Закон (2d) сразу становится избыточным, так как следует из (1g). Но взаимодействие между первой и второй частями системы вывода этим далеко не ограничивается. В частности, можно показать, что законы (1a), (1b), (1d), (1e) и (1f) также избыточны.

**Предложение 3.1.** Система вывода (0a)–(2f) эквивалентна следующей: [start=0]

- (0) Все законы и правила вывода QC и QH

- (1)  $\frac{p}{!p}$
- (2)  $\frac{\alpha}{? \alpha}$
- (3)  $\cdot ?! p \rightarrow p$
- (4)  $\cdot \alpha \rightarrow !? \alpha$
- (5)  $\cdot !(p \rightarrow q) \rightarrow (!p \rightarrow !q)$
- (6)  $\cdot ?(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (? \alpha \rightarrow ? \beta)$
- (7)  $\neg ! \perp$

### 3.4. Основные свойства

**Предложение 3.2.** Следующие принципы выводимы в QHC:

- (1)  $! \perp \leftrightarrow \times$
- (2)  $? \times \leftrightarrow \perp$
- (3)  $\cdot !p \wedge !q \leftrightarrow !(p \wedge q)$
- (4)  $\cdot !p \vee q \rightarrow (p \vee q)$
- (5)  $\cdot \forall x !p(x) \leftrightarrow !\forall x p(x)$
- (6)  $\cdot \exists x !p(x) \rightarrow !\exists x p(x)$
- (7)  $\neg \alpha \leftrightarrow !\neg \alpha$
- (8)  $\cdot (!? \alpha \rightarrow !? \beta) \leftrightarrow (? \alpha \rightarrow ? \beta)$

**Предложение 3.3.** Для любой  $i$ -формулы  $\Phi$  и  $s$ -формулы  $F$ ,  $\vdash ? \Phi \rightarrow F$  тогда и только тогда, когда  $\vdash \Phi \rightarrow !F$ .

Таким образом,  $?$  и  $!$  образуют соответствие Галуа между ЧУМами Линденбаума классов эквивалентности  $i$ -формул и  $s$ -формул.

**Предложение 3.4.** Обозначим  $\Box := ?!$ . Тогда в QHC выводимо:

- (1)  $\cdot \Box p \rightarrow p$
- (2)  $\cdot \Box p \rightarrow \Box \Box p$
- (3)  $\cdot \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- (4)  $\frac{p}{\Box p}$

Расширение логики QC оператором  $\Box := ?!$ , удовлетворяющим (1)–(4) – это модальная логика QS4.

**Предложение 3.5.** Обозначим  $\nabla := !?$ . Тогда в QHC выводимо:

- (1)  $\cdot \alpha \rightarrow \nabla \alpha$
- (2)  $\cdot \nabla \nabla \alpha \rightarrow \nabla \alpha$
- (3)  $\cdot \nabla(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\nabla \alpha \rightarrow \nabla \beta)$
- (4)  $\nabla \times \rightarrow \times$

Расширение логики QH оператором  $\nabla$ , удовлетворяющим (1)–(4), будем обозначать как QH4. Эту интуиционистскую модальную логику исследовали М. Фэйртлаф и М. Уолтон [9], а также П. Акцель [10], позднее – С. Артёмов и Т. Протопопеску [11]. При удалении (4) получается логика, которую исследовал ещё Х. Карри в 1950 году [12, с. 120], а позднее также Р. Голдблатт (1979) и многие другие.

**Предложение 3.6.** В логике QHC выводимо:

- (1)  $\cdot \nabla \alpha \rightarrow \neg\neg \alpha$
- (2)  $\cdot \neg \nabla \alpha \leftrightarrow \neg \alpha$
- (3)  $\cdot \neg \alpha \leftrightarrow \nabla \neg \alpha$
- (4)  $\cdot \Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q$
- (5)  $\cdot \nabla(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \nabla \alpha \wedge \nabla \beta$

## 4. СИНТАКСИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

### 4.1. $\Box$ -интерпретация

Классический доказуемый перевод логики QH в логику QS4 (см. [4]) продолжается до следующей синтаксической  $\Box$ -интерпретации QHC в QS4, обозначаемой как  $A \mapsto A_{\Box}$ :

- перед атомарными  $i$ -формулам вставляется  $\Box$ ;
- интуиционистские связки и кванторы становятся классическими (а также  $[1] \times [1] \times [-2] \times [-4] \times$ ,  $\sqrt{\quad}$  превращаются в  $\perp$ ,  $T$ ), и перед ними вставляется  $\Box$  (на самом деле, вставлять  $\Box$  действительно необходимо только перед  $\rightarrow$  и  $\vee$ );

- ? удаляется, ! заменяется на  $\Box$ .

**Теорема 4.1.** Если  $A_1, \dots, A_n \vdash_{QHC} A$ , то  $(A_1)_{\Box}, \dots, (A_n)_{\Box} \vdash_{QS4} A_{\Box}$ .

**Следствие 4.2.** Логика QHC является консервативным расширением логики QS4, а следовательно, и логики QC.

Несложно переформулировать  $\Box$ -интерпретацию как расширение оригинальной формы Гёделя (см. [4]) доказуемого перевода:

- $\times$ ,  $\sqrt{\quad}$  превращаются в  $\perp$ ,  $T$ ;
- интуиционистские связки и кванторы становятся классическими и после них (т.е. перед формулами, которые они связывают) вставляется  $\Box$  (на самом деле, вставлять  $\Box$  действительно необходимо только после  $\vee$ ,  $\exists$  и  $\rightarrow$ );
- ? удаляется, ! заменяется на  $\Box$ .

### 4.2. $\neg\neg$ -интерпретация

$5 A \mapsto A_{\neg\neg}$ : Стандартный  $\neg\neg$ -перевод логики QC в логику QH (см. [4]) продолжается до следующей синтаксической  $\neg\neg$ -интерпретации QHC в QH, обозначаемой как  $A \mapsto A_{\neg\neg}$ :

- перед атомарными  $s$ -формулами вставляется  $\neg\neg$ ;
- классические связки и кванторы становятся интуиционистскими (а также  $\perp$ ,  $T$  превращаются в  $\times$ ,  $\sqrt{\quad}$ ) и перед ними вставляется  $\neg\neg$  (на самом деле, вставлять  $\neg\neg$  действительно необходимо только перед  $\vee$  и  $\exists$ );
- ! удаляется, ? заменяется на  $\neg\neg$ .

**Теорема 4.3.** Если  $A_1, \dots, A_n \vdash_{QHC} A$ , то  $(A_1)_{\neg\neg}, \dots, (A_n)_{\neg\neg} \vdash_{QH} A_{\neg\neg}$ .

**Следствие 4.4.** Логика QHC является консервативным расширением логики QH.

На вопрос автора, является ли логика QHC также консервативным расширением логики QH4, недавно утвердительно ответила А. Оноприенко [13], [14].

Несложно переформулировать  $\neg\neg$ -интерпретацию в виде расширения версии Куроды (см. [4]) классического  $\neg\neg$ -перевода:

- если вся формула есть  $s$ -формула, то перед ней вставляется  $\neg\neg$ ;
- $\perp$ ,  $T$  превращаются в  $\times$ ,  $\sqrt{\quad}$ ;
- классические связки и кванторы становятся интуиционистскими, и после них (т.е. перед формулами, которые они связывают) вставляется  $\neg\neg$  (на самом деле, вставлять  $\neg\neg$  действительно необходимо только после  $\vee$ );
- ? удаляется, ! заменяется на  $\neg\neg$ .

### 4.3. $\nabla$ -интерпретация

$\Box$ -интерпретация QHC в QS4, взятая в композиции со вложением QS4 в QHC,  $\Box \mapsto$ , может быть “улучшена” так, чтобы сорта формул сохранялись. А именно, если  $A$  – формула логики QHC, пусть  $A_{\nabla}$  – формула логики QHC, полученная из  $A$  путём вставления  $\nabla :=$  перед всеми атомарными  $i$ -формулами, а также перед всеми интуиционистскими связками и кванторами. (На самом деле, из связок и кванторов вставлять  $\nabla$  действительно необходимо только перед  $\vee$  и  $\exists$ .)

**Теорема 4.5.** Если  $A_1, \dots, A_n \vdash A$ , то  $(A_1)_{\nabla}, \dots, (A_n)_{\nabla} \vdash A_{\nabla}$ . Более того, если  $A$  – формула логики QH, то  $\vdash A_{\nabla}$  влечёт  $\vdash A$ .

В частности, это даёт нетривиальное вложение QH в QHC (на самом деле, в QH4), образ которого – “не различающий разных решений” (“proof-irrelevant”) экземпляр интуиционистской логики. С другой стороны, с помощью моделей можно показать, что ни  $A \vdash A_{\nabla}$ , ни  $A_{\nabla} \vdash A$  вообще говоря неверно для формул логики QH.

4.4.  $\diamond$ -интерпретация

$\neg\neg$ -интерпретацию QHC в QH тоже можно “улучшить” так, чтобы она сохраняла сорта формул. А именно, если  $A$  – формула логики QHC, пусть  $A_{\diamond}$  – формула логики QHC, полученная из  $A$  вставлением  $\square\diamond$  перед всеми атомарными с-формулами, всеми классическими связками и кванторами, а также перед всеми вхождениями  $?$ , где  $\square = \diamond$  и  $\diamond = \neg\square\neg$ . (На самом деле, вставлять  $\square\diamond$  перед  $\wedge$  необязательно, а перед  $\rightarrow$  и  $\forall$  достаточно вставлять только  $\square$ .)

**Теорема 4.6** Если  $A_1, \dots, A_n \vdash A$ , то  $(A_1)_{\diamond}, \dots, (A_n)_{\diamond} \vdash A_{\diamond}$ . Более того, если  $A$  – формула логики QC, то  $\vdash A_{\diamond}$  влечёт  $\vdash A$ .

Получающееся нетривиальное вложение QC в QHC – это вложение Фиттинга QC в QS4 [16]. С другой стороны,  $A \vdash A_{\diamond}$  опровергается рассмотрением моделей.

4.5. Уточнённый  $\neg\neg$ -перевод

Следующую переформулировку  $\diamond$ -интерпретации при ограничении на QC можно рассматривать как уточнение оригинального  $\neg\neg$ -перевода Колмогорова:

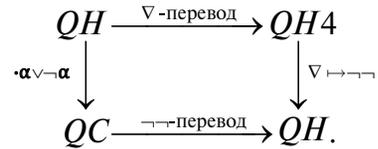
- перед каждой классической  $\rightarrow$  вставляется  $?$ , а после неё  $!$ ;
- перед каждым классическими  $\forall$  и  $\wedge$  вставляется  $?$ , а после них  $\neg!$ ;
- перед каждым классическими  $\vee$  и  $\exists$  вставляется  $\neg?$ , а после них  $!$ ;
- каждая  $\nabla$  заменяется на  $\neg\neg$ ;
- каждый  $!$ , предшествующий атомарной с-формуле, заменяется на  $\neg!$ ;
- если вся формула начинается с  $?$ , этот  $?$  заменяется на  $\neg?$ ;
- если вся формула есть атомарная с-формула, перед ней вставляется  $\diamond$ .

В самом деле, в этой интерпретации все классические связки и кванторы выражаются через интуиционистские, а также через  $?$ ,  $!$  и класси-

ческое  $\neg$ . Например,  $\exists x p(x)$  интерпретируется как  $\neg?\neg\exists x!p(x)$ , т.е. “невозможно вывести противоречие из построения некоторого  $x$  вместе с доказательством  $p(x)$ ”. С точки зрения математической практики это звучит более осмысленно, чем оригинальный колмогоровский перевод,  $\neg\neg\exists x p(x)$ .

4.6.  $\neg\neg$ -перевод нельзя улучшить

Легко видеть, что следующая диаграмма коммутативна.



Эта диаграмма является пушаутом. Иными словами, классический  $\neg\neg$ -перевод QC в QH не может быть улучшен в следующем смысле: он не пропускается ни через какую логику, полученную добавлением к QH4 набора законов, которые в совокупности строго слабее, чем  $\cdot\nabla\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$ .

5. ПРИНЦИПЫ

Законы и правила вывода логики QHC возникли из наиболее ранних и хорошо известных толкований интуиционистской логики, и потому едва ли в них может быть что-то спорное (если конечно мы принимаем язык логики QHC). Но не может ли случиться так, что ещё какой-нибудь настолько же не вызывающий сомнений принцип (или правило), выразимый в языке логики QHC, не выводим в QHC, и тем самым его “не хватает” в нашей системе вывода?

5.1. Гильбертов принцип “no ignorabimus”

Принцип разрешимости для  $i$ -формул,  $\cdot?( \gamma \vee \neg\gamma )$ , мы будем называть *гильбертовым принципом “no ignorabimus”*, или коротко *H-принципом*. Имеющие отношение к делу тексты Д. Гильберта, в которых он настаивал на принципе “разрешимости всякой математической проблемы”, подробно обсуждаются в [2].

**Предложение 5.1.** Каждый из следующих принципов эквивалентен H-принципу:

- (1)  $\cdot?( \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha )$ ;
- (2)  $\cdot?\neg\alpha \leftrightarrow \neg?\alpha$ ;
- (3)  $\cdot\nabla\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$ ;

- (4)  $\cdot ?(\nabla \alpha \vee \neg \nabla \alpha)$ ;  
 (5)  $\cdot \neg \neg \nabla \alpha \rightarrow \nabla \alpha$ ;  
 (6)  $\cdot ?(\neg \neg \nabla \alpha \rightarrow \nabla \alpha)$ ;  
 (7)  $\cdot ?(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ?(\alpha \rightarrow ?\beta)$ ;  
 (8)  $\cdot (\Box p \rightarrow \Box q) \leftrightarrow \Box(\Box p \rightarrow \Box q)$ ;  
 (9)  $\cdot \Box p \leftrightarrow \Diamond \Box p$ ;  
 (10)  $\cdot \Diamond p \leftrightarrow \Box \Diamond p$ .

**Следствие 5.2.** *Логика QHC, расширенная H-принципом, является консервативным расширением логики QS5.*

### 5.2. Принцип стабильности Колмогорова

Принцип  $\neg \neg p \rightarrow !p$  мы будем называть “принципом стабильности Колмогорова”, или коротко *K-принципом*. Это связано с мнением, выраженным А. Н. Колмогоровым в письме А. Гейтингу, которое, как аргументируется в [1; § 6.2.2] (см. также [2; § 3.1.2]), можно истолковать как утверждение, что в рамках конструктивизма всякое предложение должно быть либо задачей, либо *стабильным высказыванием*, то есть таким высказыванием  $P$ , что задача  $\neg \neg P \rightarrow !P$  имеет решение. (Как обсуждается в [1; § 4.1], стабильные высказывания тесно связаны со стабильными задачами, то есть такими задачами  $\Gamma$ , что задача  $\neg \neg \Gamma \rightarrow \Gamma$  имеет решение.)

**Предложение 5.3.** *Каждый из следующих принципов и правил эквивалентен K-принципу:*

- (1)  $\cdot ?(\neg \neg p \rightarrow !p)$ ;  
 (2)  $\cdot ?(!p \vee \neg \neg p)$ ;  
 (3)  $\cdot \Box p \leftrightarrow p$ ;  
 (4)  $\cdot \neg \neg p \leftrightarrow !p$ ;  
 (5)  $\cdot !(p \rightarrow q) \leftrightarrow !(p \rightarrow !q)$ ;  
 (6)  $\cdot \Box(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ ;  
 (7)  $\cdot \Box(p \rightarrow q) \leftrightarrow \Box(\Box p \rightarrow \Box q)$ ;  
 (8)  $\cdot \Box(p \vee q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Box q)$ ;  
 (9)  $\cdot \exists x p(x) \leftrightarrow \neg \neg \exists x !p(x)$ ;  
 (10)  $\cdot \forall x p(x) \leftrightarrow ?\forall x \neg \neg p(x)$ ;  
 (11)  $\frac{\Diamond p}{p}$ ;  
 (12)  $\frac{\neg \neg p}{\neg p}$ .

Сродни принципу (3) следующий “принцип конструктивности доказательств” (*PC-принцип*):  $\cdot \nabla \alpha \rightarrow \alpha$ .

**Предложение 5.4.** (а) *Каждый из следующих принципов эквивалентен K-принципу:*

- (1)  $\cdot (p \rightarrow q) \leftrightarrow ?(!p \rightarrow !q)$ ;  
 (2)  $\cdot p \vee q \leftrightarrow ?(!p \vee !q)$ ;  
 (3)  $\cdot \exists x p(x) \leftrightarrow ?\exists x !p(x)$ ;  
 (4)  $\cdot \forall x p(x) \leftrightarrow ?\forall x !p(x)$ .

(б) *Каждый из следующих принципов эквивалентен PC-принципу:*

- (1)  $\cdot (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow !(? \alpha \rightarrow ? \beta)$ ;  
 (2)  $\cdot \alpha \vee \beta \leftrightarrow !(? \alpha \vee ? \beta)$ ;  
 (3)  $\cdot \exists x \alpha(x) \leftrightarrow !\exists x ? \alpha(x)$ ;  
 (4)  $\cdot \forall x \alpha(x) \leftrightarrow !\forall x ? \alpha(x)$ .

**Теорема 5.5.** (а) *Логика QHC, расширенная любым набором следствий из K-принципа, является консервативным расширением как QH, так и QS.*

(б) *Логика QHC, расширенная любым набором следствий из PC-принципа, является консервативным расширением как QH, так и QS4.*

### 5.3. Дальнейшие принципы

Рассмотрим следующие принципы, каждый из которых является следствием или K-принципа, или PC-принципа.

- “Принцип сводимости” (*R-принцип*):  $\cdot (\nabla \alpha \rightarrow \nabla \beta) \rightarrow \nabla (\alpha \rightarrow \beta)$ ;
- “Принцип снятия неоднозначности” (*D-принцип*):  $\cdot \nabla (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\nabla \alpha \vee \nabla \beta)$ ;
- $\forall_{\nabla}$ -принцип:  $\cdot \nabla \forall x \alpha(x) \leftrightarrow \forall x \nabla \alpha(x)$ ;
- $\exists_{\Box}$ -принцип:  $\cdot \Box \exists x p(x) \leftrightarrow \exists x \Box p(x)$ ;
- $\exists_{\Box}$ -принцип:  $\cdot \forall x \Box p(x) \leftrightarrow \Box \forall x p(x)$ ;
- $\exists_{\Box}$ -принцип:  $\cdot \exists x \nabla \alpha(x) \leftrightarrow \nabla \exists x \alpha(x)$ .

Рассмотрим также “PC-правило”  $\frac{\nabla \alpha}{\alpha}$ , которое, как легко видеть, эквивалентно правилу  $\frac{? \alpha}{\alpha}$ .

**Предложение 5.6.** *PC-принцип эквивалентен метаконъюнкции PC-правила и R-принципа.*

8 из 9 введённых выше принципов допускают единообразное описание:

**Предложение 5.7.**

(а)

1.  $\cdot ?!(p \vee q) \leftrightarrow !(p \vee !q)$  эквивалентен *K-принципу*;

2.  $\cdot !? \alpha \vee !? \beta \leftrightarrow !(? \alpha \vee ? \beta)$  эквивалентен D-принципу.

(b)

1.  $\cdot !(p \rightarrow q) \leftrightarrow ?(p \rightarrow !q)$  эквивалентен K-принципу;

2.  $\cdot (?p \rightarrow ?!q) \leftrightarrow ?(p \rightarrow !q)$  эквивалентен H-принципу;

3.  $\cdot !(? \alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow !(? \alpha \rightarrow ? \beta)$  эквивалентен R-принципу.

(c)

1.  $\cdot ?!\exists x p(x) \leftrightarrow ?\exists x !p(x)$  эквивалентен  $\exists_{\square}$ -принципу;

2.  $\cdot \exists x !? \alpha(x) \leftrightarrow !\exists x ? \alpha(x)$  эквивалентен  $\exists_{\nabla}$ -принципу.

(d)

1.  $\cdot \forall x !? \alpha(x) \leftrightarrow ? \forall x ? \alpha(x)$  эквивалентен  $\forall_{\nabla}$ -принципу;

2.  $\cdot \forall x !? p(x) \leftrightarrow ? \forall x !p(x)$  эквивалентен  $\forall_{\square}$ -принципу.

**Теорема 5.8.** (a) 9 принципов, введённых выше, а также PC-правило (обозначаемое как PC\*) невыводимы в логике QHC. Более того, между ними нет никаких импликаций, помимо самоимпликаций и следующих (см. рис. 1):

(b) Следующий “принцип исключительного снятия неоднозначности” (ED-принцип)

$$\cdot \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \vee \beta) \rightarrow \nabla \alpha \vee \nabla \beta)$$

невыводим в логике QHC. Более того, он не следует ни из одного из 9 принципов, введённых ранее, за исключением D-принципа и PC-принципа.

Автором был поставлен вопрос, следует ли ED-принцип из PC-правила. Недавно А. Оноприенко ответила на этот вопрос отрицательно [13].

#### 5.4. Интуиционистски неприемлемые принципы

**Предложение 5.9.** В предположении H-принципа выполнено следующее.

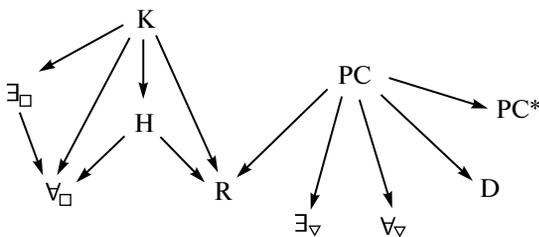


Рис. 1.

(a) PC-принцип эквивалентен PC-правилу, а также принципу  $\cdot \alpha \vee \neg \alpha$ ;

(b) D-принцип эквивалентен принципу Янкова,  $\cdot \neg \alpha \vee \neg \neg \alpha$ ;

(c)  $\forall_{\nabla}$ -принцип эквивалентен принципу сдвига двойного отрицания,

$$\cdot \forall x \neg \neg \alpha(x) \rightarrow \neg \neg \forall x \alpha(x);$$

(d)  $\exists_{\nabla}$ -принцип эквивалентен сильному принципу Маркова,

$$\cdot \neg \neg \exists x \alpha(x) \rightarrow \exists x \neg \neg \alpha(x);$$

(e) ED-принцип эквивалентен принципу  $\cdot \nabla \alpha \vee \neg \nabla \alpha$ .

**Предложение 5.10.** В предположении PC-принципа выполнено следующее.

(a)  $\forall_{\square}$ -принцип влечёт принцип постоянства области,

$$\cdot \forall x(\alpha \vee \beta(x)) \rightarrow \alpha \vee \forall x \beta(x);$$

(b)  $\exists_{\square}$ -принцип влечёт принцип независимости посылки,

$$\cdot (\alpha \rightarrow \exists x \beta(x)) \rightarrow \exists x(\alpha \rightarrow \beta(x)).$$

**Предложение 5.11.** (a) Принцип  $\cdot \exists x p(x) \leftrightarrow \exists x !p(x)$

• эквивалентен метаконъюнкции  $\exists_{\square}$ - и  $\exists_{\nabla}$ -принципов; а также

• влечёт обобщённый принцип Маркова,  $\cdot \neg \forall x \alpha(x) \rightarrow \exists x \neg \alpha(x)$ .

(b) Принцип  $\cdot ? \forall x \alpha(x) \leftrightarrow \forall x ? \alpha(x)$

• эквивалентен метаконъюнкции  $\forall_{\square}$ - и  $\forall_{\nabla}$ -принципов; а также

• влечёт параметрический принцип дистрибутивности,

$$\cdot \neg \forall y(\alpha(y) \vee \forall x \beta(x, y)) \rightarrow \neg \forall y \forall x(\alpha(y) \vee \beta(x, y)).$$

**Предложение 5.12.** Принцип Янкова  $\cdot \neg \alpha \vee \neg \neg \alpha$  влечёт ED-принцип.

Хорошо известно, что принцип Янкова (также известный как закон де Моргана и “слабый закон исключённого третьего”), принцип сдвига двойного отрицания, сильный принцип Маркова, обобщённый принцип Маркова, принцип постоянства области и принцип независимости посылки не выводимы в QH (см. [4]). Параметрический принцип дистрибутивности — это ва-

риант известного принципа Клини, также невыводимый в QN [4].

## 6. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

### 6.1. Внутренностные модели

Рассматривая композицию  $\square$ -интерпретации логики QНС с топологическими моделями логики QS4, мы получаем *внутренностные модели* логики QНС (называвшиеся “моделями Эйлера–Тарского” в ранних версиях [1] и [2]). Таким образом,

- фиксируются топологическое пространство  $X$  и множество  $D$ ;
- с-формулы с  $n$  свободными переменными интерпретируются  $D^n$ -параметрическими семействами произвольных подмножеств  $X$ , как в обычных моделях Лейбница–Эйлера–Венна;
- i-формулы с  $n$  свободными переменными интерпретируются  $D^n$ -параметрическими семействами открытых подмножеств  $X$ , как в обычных моделях Стоуна–Танга–Тарского;
- ! интерпретируется взятием внутренности, а ? в этих моделях не делает ничего.

### 6.2. Регуляризационные модели

Рассматривая композицию  $\neg \neg$ -интерпретации логики QНС с моделями Стоуна–Танга–Тарского логики QН, мы получим *регуляризационные модели* логики QНС (называвшиеся “моделями Тарского–Колмогорова” в ранних версиях [1] и [2]). Таким образом,

- фиксируются топологическое пространство  $X$  и множество  $D$ ;
- i-формулы с  $n$  свободными переменными интерпретируются  $D^n$ -параметрическими семействами открытых подмножеств  $X$ , как в обычных моделях Стоуна–Танга–Тарского;
- с-формулы с  $n$  свободными переменными интерпретируются  $D^n$ -параметрическими семействами регулярных открытых подмножеств  $X$ , используя обычную булеву алгебру регулярных открытых множеств;
- ? интерпретируется взятием внутренности замыкания, а ! в этих моделях не делает ничего.

### 6.3. Пучково/множественно-значные модели

Опишем теперь *пучково/множественно-значную* структуру, интерпретирующую язык логики QНС.

- Фиксируются топологическое пространство  $X$  и множество  $D$ ;
- с-формулы с  $n$  свободными переменными интерпретируются  $D^n$ -параметрическими семействами произвольных подмножеств  $X$ , как в обычных моделях Лейбница–Эйлера–Венна;
- i-формулы с  $n$  свободными переменными интерпретируются  $D^n$ -параметрическими семействами пучков множеств на  $X$ , используя обычные операции  $\sqcup$ ,  $\times$ ,  $\text{Hom}$ ,  $\prod_{d \in D}$ ,  $\prod_{d \in D}$  на пучках;  $\models \Phi$  означает, что  $\Phi$  интерпретируется семейством, в котором каждый пучок имеет глобальное сечение;
- $|\!|F|\!|$  – пучок, задаваемый тождественным вложением  $\text{Int} \mid F \mapsto X$ ;
- $|\!|\Phi|\!|$  – множество всех таких  $x \in X$ , что стебель  $\mid \Phi \mid_x$  пучка  $\mid \Phi \mid$  непуст.

Аналогично описывается *предпучково/множественно-значная* структура. В этих структурах несколько иначе интерпретируются интуиционистские  $\vee$  и  $\exists$ , поскольку вообще говоря  $\sigma\mathcal{F} \sqcup \sigma\mathcal{G} \neq \sigma(\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G})$ , где  $\sigma\mathcal{F}$  обозначает предпучок сечений пучка  $\mathcal{F}$ .

**Теорема 6.1.** *Пучково/множественно-значные и предпучково/множественно-значные структуры являются моделями логики QНС.*

Результаты разделов § 4 и § 5 получены с использованием лишь трёх описанных классов моделей. Так же как и следующий результат: логика QНС неполна относительно каждого из этих 3 классов.

### 6.4. Модели с плотным образом

Класс моделей логики QНС, относительно которых она полна, был не так давно найден А. Оноприенко [13], [14]. После знакомства с её моделями пропозиционального фрагмента НС [13; § 4] автор описал следующий новый класс *топологических* моделей логики QНС.

- Фиксируется топологическое пространство  $X$ , множества  $D$  и  $S$  и отображение  $fS \rightarrow X$  с плотным образом;
- с-формулы с  $n$  свободными переменными интерпретируются  $D^n$ -параметрическими семействами произвольных подмножеств  $S$ , как в обычных моделях Лейбница–Эйлера–Венна;
- i-формулы с  $n$  свободными переменными интерпретируются  $D^n$ -параметрическими

семействами открытых подмножеств  $X$ , как в обычных моделях Стоуна–Танга–Тарского;

- ? интерпретируется взятием прообраза относительно  $f$ ;
- ! интерпретируется сопоставлением всякому  $T \subset S$  внутренности множества  $X \setminus f(S \setminus T)$ .

Автор спрашивал А. Оноприенко (в 2018 году), полна ли логика QHC относительно данного класса топологических моделей. Недавно она ответила на этот вопрос утвердительно в пропозициональном случае, причём уже для тех моделей, в которых  $f$  инъективно [13; § 8], [15].

### 7. ОБСУЖДЕНИЕ

Обсуждение родственных исследований других авторов см. в [1; § 1.4].

Прокомментируем коротко значение логики QHC для элементарной математики.

1) *Алгебра*. Пучково/множественно-значные модели QHC (см. § 6) естественным образом возникают при рассмотрении действий над алгебраическими уравнениями [2; § 1.1].

2) *Геометрия*. Логическая структура первых 4 книг *Начал* Евклида достаточно хорошо описывается некоторой теорией над QHC, чисто классический фрагмент которой совпадает со слабой (конечно аксиоматизируемой) элементарной геометрией Тарского, а чисто интуиционистский фрагмент — с “интуиционистской геометрией Тарского”, построенной М. Бисоном [17].

3) *Арифметика*. В пока ещё незавершённой работе автора вводится объединённая логика высказываний, задач и решений, а также её предикатный вариант  $QHC_\lambda$ . Она содержит QHC,  $S4pr$  (см. § 2), а также типизированное  $\lambda$ -исчисление, отвечающее QH при соответствии Карри–Ховарда. Если исключить из  $QHC_\lambda$  квантификацию по решениям (и, тем самым, оператор ? логики QHC), получившийся фрагмент  $QHC_\lambda$  допускает, как ожидается, интересную арифметическую интерпретацию: задачи и их решения интерпретируются арифметическими множествами и их элементами, как в реализуемости по Клини; а задача  $!P$ , т.е. “доказать высказывание  $P$ ”, интерпретируется множеством гёделевых номеров всех формальных доказательств  $P$ .

### БЛАГОДАРНОСТИ

Я хотел бы поблагодарить А. Бауэра, Л. Беклемишева, М. Безема, Ж. Довека, М. Джибладзе, А. Оно-

приенко, А. Л. Семёнова, Д. Шамканова, В. Шехтмана и А. Шеня за ценные обсуждения и полезные комментарии и двум рецензентам ДАН за разумные замечания. Кроме того, я очень признателен А. Оноприенко за помощь в переводе текста статьи на русский язык. Настоящая заметка обязана своим появлением запросам А. Л. Семёнова и напоминаниям Л. Беклемишева и С. Кузнецова.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Melikhov S.A.* A Galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax. arXiv:1312.2575v5.
2. *Melikhov S.A.* A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics. arXiv:1504.03379v5.
3. *Paulson L.C.* The foundation of a generic theorem prover // J. Automat. Reason. 1989. V. 5 P. 363–397.
4. *Melikhov S.A.* Mathematical semantics of intuitionistic logic. arXiv:1504.03380v3.
5. *Колмогоров А.Н.* К работам по интуиционистской логике. Избранные труды // Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 393; English transl., On the papers on intuitionistic logic. Selected Works of A.N. Kolmogorov // Mathematics and its Applications. 1991. V. 1. P. 451–452. Kluwer, Dordrecht: Soviet Series. V. 25.
6. *Kolmogoroff A.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Math. 1932. Z. 35. S. 58–65. Рус. пер. *Колмогоров А.Н.* К толкованию интуиционистской логики. Избранные труды // Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 142–148; English transl. *Kolmogorov A.N.* On the interpretation of intuitionistic logic. Selected works // Mathematics and its Applications. 1991. V. 1. P. 151–158. Kluwer, Dordrecht: Soviet Series. V. 25.
7. *Godt K.* Lecture at ZilseTs. Collected Works. V. III. New York: The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1995. P. 86–113.
8. *Artcmov S.N.* Explicit provability and constructive semantics // Bull. Symbolic Logic. 2001. N 7. P. 1–36.
9. *Fairtlough M. and Walton M.* Quantified lax logic. Tech, report CS-97-11, Univ, of Sheffield (1997). <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/versions?https://doi.org/10.1.1.50.69>
10. *Aczel P.* The Russell-Prawitz modality // Math. Structures Comput. Sci. 2001. N 11. P. 541–554.
11. *Artcmov S.N. and Protopopescu T.* Intuitionistic epistemic logic (early preprint version). arXiv: 1406.1582v2 (не путать с v4 и опубликованной версией).
12. *Curry H.B.* A Theory of Formal Deducibility // Notre Dame Math. Lectures. V. 6. Notre Dame, IN: Univ. of Notre Dame, 1950.

13. *Онопrienко А.А.* Семантика типа Крипке для пропозициональной логики задач и высказываний // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 5. С. 98–125; English transl., Onoprienko A.A. Kripke type semantics for a logic of problems and propositions // Sbornik Math. 2020. V. 211. P. 709–732.
14. *Онопrienко А.А.* Предикатный вариант совместной логики задач и высказываний // Матем. сб. 2022. Т. 213. № 7. С. 7, 97–120; English transl., Onoprienko A.A. The predicate version of the joint logic of problems and propositions. Sbornik Math. 2022. V. 213. P. 981–1003.
15. *Онопrienко А.А.* Топологические модели пропозициональной логики задач и высказываний // Вестник Москов. унив. 2022. № 5. С. 25–30; English transl., Onoprienko A.A. Topological models of the propositional logic of problems and propositions // Moscow Univ. Math. Bull. 2022. N 77. P. 236–241.
16. *Fitting M.* An embedding of classical logic in  $S_4$  // J. Symbolic Logic. 1970. N 35. P. 529–534.
17. *Mclikhov S.A.* A Galois connection between classical and intuitionistic logics. III: Geometry. Preliminary version: §1A and §§3–4 in arXiv: 1504.03379v2.

## A JOINT LOGIC OF PROBLEMS AND PROPOSITIONS

S. A. Melikhov<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

In a 1985 commentary to his collected works, Kolmogorov informed the reader that his 1932 paper *On the interpretation of intuitionistic logic* “was written in hope that with time, the logic of solution of problems [i.e., intuitionistic logic] will become a permanent part of a [standard] course of logic. A unified logical apparatus was intended to be created, which would deal with objects of two types – propositions and problems.” We construct such a formal system as well as its predicate version, QHC, which is a conservative extension of both the intuitionistic predicate calculus QH and the classical predicate calculus QC. The axioms of QHC are obtained as a result of a simultaneous formalization of two well-known alternative explanations of intuitionistic logic: 1) Kolmogorov's problem interpretation (with familiar refinements by Heyting and Kreisel) and 2) the proof interpretation by Orlov and Heyting, as clarified and extended by Gödel.

*Keywords:* intuitionistic logic, BHK-interpretation, formal meta-logic

УДК 519.6

## ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© 2024 г. Академик РАН Б. Н. Четверушкин<sup>1, \*</sup>, А. Е. Луцкий<sup>1, \*\*</sup>, Е. В. Шильников<sup>1, \*\*\*</sup>

Поступило 21.02.2024 г.  
После доработки 01.04.2024 г.  
Принято к публикации 01.04.2024 г.

В работе получена замкнутая система уравнений для описания турбулентных течений. Дополнительные уравнения для перекрестных пульсационных моментов  $\overline{\rho\Delta u_i\Delta u_k}$  выводятся на основе балансного кинетического уравнения, с помощью которого ранее была получена квазигазодинамическая система уравнений. Приводятся результаты расчета пространственно-двумерной задачи о слое смешения двух потоков.

*Ключевые слова:* квазигазодинамическая система уравнений, турбулентное течение, замыкание системы осредненных уравнений

DOI: 10.31857/S2686954324020086, EDN: XISWSM

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Основной проблемой, связанной с моделированием турбулентных течений на основе осредненных уравнений, является появление дополнительных переменных в виде пульсационных моментов [1]. В свою очередь их появление приводит к необходимости поиска тех или иных способов замыкания системы уравнений, состоящей из осредненных газодинамических параметров и пульсационных моментов.

Поясним суть возникающих трудностей на примере относительно простой пространственно-двумерной задачи, описывающей течение слабо сжимаемого изотермического газа. Введем следующие обозначения:  $t$  – время,  $x$  и  $y$  – пространственные координаты,  $\rho$  – осредненное по времени значения плотности,  $u$  и  $v$  – осредненные значения скорости, соответственно в направлении оси  $Ox$  и  $Oy$ ,  $\overline{\Delta u^2}$ ,  $\overline{\Delta v^2}$ ,  $\overline{\Delta u\Delta v}$  – осредненные пульсационные моменты.

Пренебрегая пульсациями плотности, выпишем систему уравнений для указанных осредненных переменных

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u^2}}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho v^2 + p \right) + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho \Delta v^2} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

где  $p$  – давление,  $\mu$  – коэффициент вязкости.

Пульсационные моменты  $\overline{\rho \Delta u^2}$  и  $\overline{\rho \Delta v^2}$  можно трактовать как малые добавки к давлению  $p$ , которые не оказывают существенного влияния на картину течения. Однако даже отбрасывая их, приходим к системе, состоящей из трех уравнений относительно четырех переменных  $\rho, u, v$  и  $\overline{\Delta u \Delta v}$ . Проблема замыкания полученной системы уравнений является основной при описании турбулентных течений.

Одним из способов замыкания является использование гипотезы Буссинеска с введением модели турбулентной вязкости [1,5]

$$\overline{\rho \Delta u_i \Delta u_k} = -\mu_m \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.4)$$

представляющей пульсационный момент в виде, аналогичном естественной молекулярной вяз-

<sup>1</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

\* E-mail: chetver@imamod.ru

\*\* E-mail: allutsky@yandex.ru

\*\*\* E-mail: shilnikov@imamod.ru

кости. Для конструирования турбулентной вязкости  $\mu_m$  существует большое количество моделей, например [2–10], включая популярную и теоретически хорошо обоснованную  $K - \varepsilon$  модель, основанную на классических работах А.Н. Колмогорова [10]

$$\mu_T = C_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ C_\mu + \frac{\mu_T}{\sigma k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P - \rho \varepsilon \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ C_\mu + \frac{\mu_T}{\sigma \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + \\ + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Обратим внимание на одну особенность  $K - \varepsilon$  системы (1.6)–(1.7). В ней отсутствуют члены, большие по порядку величины, чем члены, пропорциональные предполагаемыми малыми величинам  $K, \varepsilon, \mu, \mu_m$ . Этот факт используем в дальнейшем. Здесь  $K$  – энергия турбулентных пульсаций,  $\varepsilon$  – скорость диссипации турбулентной энергии,  $C_\mu, C_1, C_2$  – настроечные параметры.

К сожалению, каждая из большого списка моделей турбулентности включает настроечные коэффициенты и работает в достаточно узком диапазоне параметров течения и геометрических конфигураций обтекаемых тел. Поэтому попытки построения новых моделей, позволяющих построить замкнутую систему, активно продолжают и в настоящее время.

В данной работе, опираясь на ранее предложенную квазигидродинамическую систему уравнений (КГД) и в первую очередь на способ ее вывода из балансного кинетического уравнения [11], выведены дополнительные уравнения относительно перекрестных пульсационных моментов  $\rho \Delta u_i \Delta u_k$ . Эти уравнения в сочетании с осредненными газодинамическими уравнениями позволяют построить замкнутую систему. К ее выводу приступим в следующем параграфе.

## 2. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ И ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вначале напомним способ вывода КГУ системы уравнений [11], которая может быть получена из балансного кинетического уравнения

$$\frac{f^{j+1} - f_0^j}{\tau} + \text{div}(\xi f_0^j) = \frac{\partial \xi_i \xi_k}{\partial x_i} \frac{\tau}{2} \frac{\partial f_0^j}{\partial x_k} \quad (2.1)$$

Здесь  $f^{j+1}(t^{j+1}, \bar{x}, \bar{\xi})$  – функция распределения на момент времени  $t^{j+1} = t^j + \tau$ ,  $f_0^j$  – локально максвелловская функция на момент времени  $t^j$

$$f_0^j(t^j, x, \xi) = \frac{\rho^j}{(2\pi RT)^{3/2}} e^{-\frac{(\xi_i - u_i)^2}{2RT}} \quad (2.2)$$

$\bar{\xi}$  – скорость молекулы,  $R$  – газовая постоянная,  $\tau$  – характерное время между столкновениями молекул.

КГД система получается путем интегрирования балансного уравнения (2.1), умноженного на сумматорные инварианты, по всем скоростям  $\xi, \xi_i \in [-\infty, \infty]$ . Характерное время  $\tau$  выбирается в соответствии с элементарной кинетической теорией [12]

$$\tau = \frac{2\mu}{P} \quad (2.3)$$

Полученная таким образом КГУ система отличается от соответствующих уравнений Навье–Стокса на члены второго порядка малости по числу Кнудсена ( $Kn$ ). Это подтверждается как теоретическим анализом [11, 13–14], так и многочисленными численными расчетами. Близость КГД-системы и уравнений Навье–Стокса дает возможность использовать для нахождения газодинамических параметров классические уравнения для моделирования вязкого газа – нашем случае, уравнения (1.1)–(1.3).

Дополнительное уравнение для пульсационного момента  $\rho \Delta u_i \Delta u_k$  получим с помощью следующей последовательности действий. Вначале умножим балансное уравнение (2.1) на  $\xi x \xi y$  и проинтегрируем по всем скоростям молекул. Из полученного в результате такой процедуры уравнения вычтем умноженное на  $v$  уравнение (1.2) и умноженное на  $u$  уравнение (1.3).

При этом возникает вопрос о выборе значения  $\tau$ , которое в отличие от характерного времени столкновения молекул должно тем или иным образом быть связанным с временем индивидуального существования турбулентных структур различных масштабов [1].

Кроме того, необходимо определить вид функции  $f^{j+1}$  в уравнении (2.1). Эта проблема не возникала при получении КГУ системы, когда уравнение (2.1) умножалось на сумматорные инварианты  $\phi = 1, \bar{\xi}, \frac{\xi^2}{2}$ . При этом вне зависимости от вида  $f^{j+1}$  результатом интегрирования

$\int f^{j+1}\varphi(\xi)d\xi = \int f_0^{j+1}\varphi(\xi)d\xi$  было значение газодинамических переменных на новом слое по времени.

Вначале определим турбулентную вязкость и связанное с ней турбулентное время  $\tau_m$ . Выберем турбулентную вязкость в виде

$$\mu_\tau = \frac{|\overline{\rho\Delta u\Delta v}|}{\left|\left|\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right|\right|} \quad (2.4)$$

где  $\left|\left|\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right|\right|$  – модуль характерного значения величины  $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ .

Понятие характерного значения не определено однозначно и является оценочной величиной. Например, в рассматриваемом ниже примере о турбулентном слое смешения в качестве  $\left|\left|\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right|\right|$  выбиралась величина

$$\left|\left|\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right|\right| = \frac{|u_1 - u_0|}{L} \quad (2.5)$$

где в качестве  $u_1$  и  $u_0$  выбирались скорости невозмущенных слоев, а  $L$  – характерная толщина слоя смешения. Как показали расчеты, вариация величины (2.5) в широком диапазоне более чем на порядок практически не сказывается на значениях осредненной скорости  $u$ . Ниже будет показано, что при изменении это величины примерно во столько же раз изменяется величина  $|\overline{\rho\Delta u\Delta v}|$ .

В том же виде, аналогичном (2.3), выражалось  $\tau_m$  при получении КГД аналога для уравнения, описывающего поведение вектора напряженности магнитного поля в [15–16]. При этом  $\tau_m$  определялось как отношение магнитной вязкости  $\gamma$  и суммы газокинетического  $P$  и магнитного давления  $\frac{B^2}{8\pi}$ .

$$\tau_m = \frac{2\gamma}{P + \frac{B^2}{8\pi}} \quad (2.6)$$

По аналогии с (2.3) и (2.6) выберем  $\tau_m$  в виде

$$\tau_\tau = \frac{2\mu_\tau}{P} \quad (2.7)$$

Обратимся теперь к выбору функции  $f^{j+1}$ , а точнее к получению ее момента  $\int f^{j+1}c_i c_k d\xi$ .

После интегрирования балансного уравнения (2.1) с весом  $\xi_i \xi_k$  представим величину  $\int f^{j+1} \xi_i \xi_k d\xi$  в виде

$$\int f^{j+1} \xi_i \xi_k d\xi = \rho \tilde{u}_i^{j+1} \tilde{u}_k^{j+1} + \int c_i c_k \tilde{f}^{j+1} d\xi \quad (2.8)$$

где

$$c_i = \xi_i - \tilde{u}_i \quad (2.9)$$

тепловая компонента  $u_i$  – осредненные значения скорости, а  $\tilde{u}_i$  – актуальное значение макроскопической скорости.

$$\tilde{u}_i = u_i + \Delta u_i \quad (2.10)$$

$\tilde{f}^{j+1}$  – представляет из себя ту часть функции  $f^{j+1}$ , которая не обращается в 0 при интегрировании с весом  $c_i c_k$ .

В свою очередь представим  $\tilde{f}^{j+1}$  в виде суммы двух функций

$$\tilde{f}^{j+1} = \tau_\tau \left( f_1 + \frac{\tau_\tau}{t_{\text{газ}}} f_2 \right) \quad (2.11)$$

где  $t_{\text{газ}}$  – характерное газодинамическое время, которое выбирается в виде

$$t_{\text{газ}} = 1 / \left|\left|\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right|\right| \quad (2.12)$$

Определим вид функции  $\tilde{f}^{j+1}$  и ее зависимости от газодинамических параметров вначале, учитывая, что в основе вывода балансного уравнения (2.1) лежит предположение о бесстолкновительном разлете, положим, что  $\tilde{f}^{j+1}$  зависит от значения газодинамических параметров с предыдущего шага по времени  $t = t^j$ .

Вблизи состояния локального термодинамического равновесия функция распределения представляется в виде

$$f = f_0 + \tau f_{NS} \quad (2.13)$$

где  $f_{NS}$  – навье-стоксовская функция распределения, являющаяся результатом разложения в ряд по малому параметру решения уравнения Больцмана с помощью процедуры Чепмена–Энскога [12, 17–18]. По аналогии с  $f_{NS}$  представим интересующий нас момент  $\tau_m \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_1 d\xi$  в виде

$$\begin{aligned} & \tau_\tau \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_1 d\xi = \\ & = h \tau_\tau \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} c_x^j c_y^j \left( \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x} \right) f_0^j d\bar{\xi} \end{aligned} \quad (2.14)$$

В свою очередь представим

$$c_x^{j+1}c_y^{j+1}c_x^j c_y^{2j} = c_x^{2j}c_y^{2j} - \tau_T \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} c_y^j c_x^{2j} - \tau_T \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} c_x^j c_y^2 + \tau_T^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} c_x^j c_y^j \quad (2.15)$$

Моменты всех членов, стоящих в правой части (2.15) кроме первого обратятся в ноль. Поэтому

$$\tau_T \int c_x^{j+1}c_y^{j+1}f_1 d\xi = h\tau_T \int c_x^{2j}c_y^{2j} \left( \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x} \right) f_0 d\xi \quad (2.16)$$

Коэффициент пропорциональности  $h$ , стоящий в правой части (2.16), выберем из следующих соображений. В уравнении для  $\overline{\rho\Delta u\Delta v}$ , которое будет получено в п. 3 путем комбинации результата интегрирования балансного уравнения (2.1) с весом  $\xi_x \xi_y$  и умноженного соответственно на  $v$  уравнения (1.2) и на  $u$  уравнения (1.3), так же, как и в  $K - \varepsilon$  модели должны отсутствовать члены по порядку величины большие, чем 0 ( $\tau, \tau_T, \overline{\rho\Delta u\Delta v}$ ).

Определим теперь функцию  $f_2$ . Учитывая определение (2.7) для  $\tau_T$  и турбулентной вязкости (2.4) получим

$$\frac{\tau_T}{\tau_{\text{газ}}} \sim \left| \overline{\rho\Delta u\Delta v} \right| \quad (2.17)$$

В свою очередь, величина  $\frac{\tau_T}{\tau_{\text{газ}}} \int c_x c_y f_2 d\xi$  должна иметь размерность, соответствующую размерности  $\frac{\partial \overline{\rho\Delta u\Delta v}}{\partial t}$  в уравнении, описывающем изменение  $\overline{\rho\Delta u\Delta v}$  по времени. Этому условию будет удовлетворять функция  $f_2$

$$f_2 \sim \frac{1}{p} f_{NS} \quad (2.18)$$

Таким образом в правой части уравнения, описывающего изменение по времени  $\overline{\rho\Delta u\Delta v}$  будет находиться член  $\frac{\tau_T}{\tau_{\text{газ}}} \int f_2 c_x c_y d\xi$ , пропорциональный

$$\left| \overline{\rho\Delta u\Delta v} \right| \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.19)$$

По своей структуре (2.19) соответствует компоненте  $P_{xy}$  — тензора вязких напряжений, деленной на  $\tau$ , где вместо газокINETического дав-

ления  $\rho c^2$  выступает величина  $\left| \overline{\rho\Delta u\Delta v} \right|$ . Учитывая эту аналогию, выберем

$$\frac{\tau_T}{\tau_{\text{газ}}} \int f_2 c_x c_y d\xi = - \left| \overline{\rho\Delta u\Delta v} \right| \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

Пульсационный момент  $\overline{\rho\Delta u\Delta v}$  имеет противоположный знак с  $\mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ . Это определяет отрицательный знак в правой части (2.20).

Определив таким образом величину  $\int f^{j+1} c_x c_y d\xi$ , приступим к выводу уравнения для пульсационного момента  $\overline{\rho\Delta u\Delta v}$ .

### 3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПУЛЬСАЦИОННОГО МОМЕНТА

Умножим функцию распределения  $f^{j+1}$ , которую определили в п.2, на  $\xi_x \xi_y$  и проинтегрируем по пространству скоростей

$$\int f^{j+1} \xi_x \xi_y d\xi = \rho \tilde{u}^{j+1} \tilde{v}^{j+1} - p \left( \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x} \right) + \left| \overline{\rho\Delta u\Delta v} \right| \left( \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

Учитывая (3.1), проинтегрируем по скоростям балансное уравнение (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{u} \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \rho \tilde{u} \tilde{v}}{\partial t^2} - p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - p \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\left| \overline{\rho\Delta u\Delta v} \right|}{2} \times \\ \times \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \rho \tilde{u}^2 \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \tilde{v}^2 \tilde{u} + \\ + \frac{\partial \rho \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\xi_p \tilde{u} \tilde{v} + \tilde{u} \xi \tilde{v}) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \tau_T \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p^2}{\rho} + p(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) + \rho \tilde{u}^2 \tilde{v}^2 \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\xi_p \tilde{u} \tilde{v} + \tilde{v} \xi \tilde{u}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Осредним уравнение (3/2) по времени. Учитывая сделанное в п. 1 замечание, пренебрежем членами, пропорциональными  $\rho \Delta \tilde{u}^2$  и  $\rho \Delta \tilde{v}^2$ , а также пульсационным моментам третьего порядка. При этом получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho uv}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \rho uv}{\partial t^2} + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho u^2 v}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial 2 \mu_T \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2 u}{\partial y} + \frac{\partial \rho u}{\partial y} = \frac{-|\overline{\rho \Delta u \Delta v}|}{2} \times \\
& \times \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} 3 \left( p \overline{\rho \Delta u \Delta v} + u^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v} \right) + \\
& + \frac{\partial \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( 3 \rho uv + \rho u^3 v \right) + \frac{\partial 2 \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \times \\
& \times \left( \frac{p^2}{\rho} + p(u^2 + v^2) + \rho u^2 v^2 \right) + \\
& + \frac{\partial 2 \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} 4 \overline{\rho \Delta u \Delta v} \frac{\partial \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} 3 \times \\
& \times \left( p \overline{\rho \Delta u \Delta v} + u^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v} \right) + \frac{\partial \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( 3 \rho uv + 3 v^3 u \right)
\end{aligned} \quad (3.3)$$

Чтобы получить уравнение, описывающее изменение  $\overline{\rho \Delta u \Delta v}$  по времени, вычтем из (3.3) уравнение (1.2), умноженное на  $v$ , и уравнение (1.3), умноженное на  $u$ . В результате получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial y} + uv \left( \frac{\partial \mu_T}{\partial x} + \frac{\partial \nu_T}{\partial y} \right) + \\
& \dot{\Delta u \Delta v} \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) + \frac{|\overline{\rho \Delta u \Delta v}|}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\
& = \frac{\partial \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} 3 \left( p + u^2 \rho \right) \overline{\rho \Delta u \Delta v} + \\
& + \frac{\partial \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( 3 \rho uv + \rho u^3 v \right) + \frac{\partial 2 \mu_T}{\partial x} \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p^2}{\rho} + p(u^2 + v^2) + \rho u^2 v^2 \right) + \\
& + \frac{\partial 2 \mu_T}{\partial x} \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} 3 \times \\
& \times \left( p + v^2 \rho \right) \overline{\rho \Delta u \Delta v} + \frac{\partial \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( 3 \rho uv + \rho v^3 u \right) - \\
& - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

На первый взгляд, наличие члена  $uv \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right)$  противоречит, положенному в основу конструирования функции  $f^{j+1}$ , предположению об отсутствии в уравнении (3.4) членов по порядку величины больших  $\overline{\rho \Delta u \Delta v}$ ,  $\mu$  и  $\mu_T$ . Тем не менее, учитывая предположение о слабой сжимаемости среды, величину

$$uv \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) = -uv \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.1)$$

можно также считать малой.

Кроме того, как показывает опыт расчетов, члены  $\frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t^2}$  и смешанные пространственные производные в правой части (3.4) практически не оказывают влияния на результаты моделирования. Их для удобства численного решения можно отбросить.

Обратимся к выбору  $\mu_T$ . Согласно (6.2) в нее входит характерное значение  $\left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$ . Оно определяется в каждом конкретном случае рассматриваемой задачи.

Например, в рассматриваемом в п. 5 случае моделирования слоя смешения величина  $\mu_T$  выбирается в виде

$$\mu_T = \frac{|\overline{\rho \Delta u \Delta v} L|}{|u_1 - u_0|} \quad (4.2)$$

где  $u_1 u_0$  – скорости слоев, а  $L$  – характерная толщина слоя смешения.

Как показал опыт расчетов, варьирование величины  $\frac{|u_1 - u_0|}{L}$  более чем на порядок практически не влияет на значение осредненной скорости  $u$  поскольку из уравнения (4.3) следует, что приблизительно во столько же раз меняется величина  $\overline{\rho \Delta u \Delta v}^{j+1}$

Для решения упрощенного варианта уравнения (3.4), без вторых производных по времени и смешанных пространственных производных, использовалась явная схема, которая в дифференциально разностном виде представлена как

$$\begin{aligned}
& \frac{\overline{\rho \Delta u \Delta v}^{j+1} - \overline{\rho \Delta u \Delta v}^j}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial x} \overline{\rho \Delta u \Delta v} + \\
& + \frac{\partial v}{\partial y} \overline{\rho \Delta u \Delta v} + \overline{\rho \Delta u \Delta v} \left( \frac{\partial \mu_T}{\partial x} + \frac{\partial \nu_T}{\partial y} \right) + \\
& uv \left( \frac{\partial \mu_T}{\partial x} + \frac{\partial \nu_T}{\partial y} \right) = - \frac{|\overline{\rho \Delta u \Delta v}|}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial \mu_T}{\partial x} \frac{\mu_T + \mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} 3 \left( p + \rho u^2 \right) \overline{\rho \Delta u \Delta v} + \frac{\partial \mu_T + \mu_T}{\partial x} \frac{\mu_T}{p} \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial x} \left( 3 \rho uv + \rho u^3 v \right) + \frac{\partial \mu_T + \mu_T}{\partial y} \frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} 3 \left( p + \rho v^2 \right) \times \\
& \times \overline{\rho \Delta u \Delta v} + \frac{\partial \mu_T + \mu_T}{\partial y} \frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} \left( 3 \rho uv + \rho v^3 u \right) - \\
& - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \quad (4.3)$$

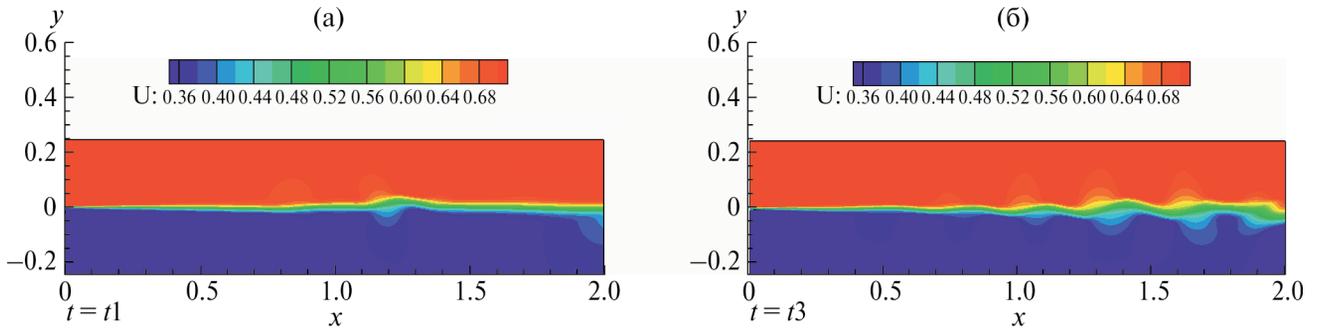


Рис. 1. Нестационарное решение уравнений Навье–Стокса. Мгновенные распределения скорости.

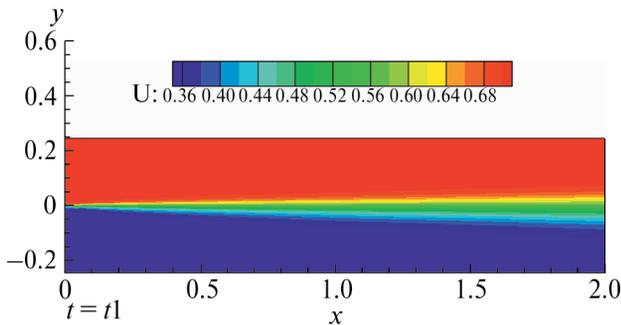


Рис. 2. Стационарное решение уравнений Рейнольдса. Распределение скорости.

Для аппроксимации пространственных производных в (4.3) можно выбрать различные алгоритмы, применяемые для решения задач гидро- и газовой динамики.

Величина  $\mu_T$  определяется из (4.2) со значением модуля пульсационного момента из решения (3.4). Значения скоростей  $u$  и  $v$  затем определяются соответственно из

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + p}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = \\ = (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2 + p}{\partial y} = \\ = (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сделаем замечание относительно коэффициента  $\mu + \mu_T$  в уравнении (4.3). Добавка к турбулентной вязкости вязкости молекулярной связана с тем, что время  $\tau_T$ , входящее в балансное уравнение (2.1), даже при отсутствии турбулентных пульсаций не может быть меньше характерного времени между столкновениями молекул.

Таким образом выведена замкнутая система уравнений (1.1)–(1.3) и (4.4)–(4.5) для моделирования двумерных турбулентных течений в слабо сжимаемом газе и жидкости.

## 5. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера расчета выбрана пространственно-двумерная задача о слое смешения. Расчетная область:  $0 < x < 2$ ,  $-0.25 < y < 0.25$ . Начальные скорости слоев  $u = 0.7$  при  $y > 0$  и  $u = 0.35$  при  $y < 0$ . Молекулярная вязкость определялась по заданному числу Рейнольдса  $Re = 5 * 10^4$ . Результаты расчетов сравнивались как с данными, полученными при использовании уравнений Навье–Стокса (ламинарный режим), так и со ставшими классическими расчетами, использующими турбулентную модель Спаларта–Аллмареса [2]. При использовании уравнений Навье–Стокса получается нестационарное решение, соответствующее неустойчивости слоя смешения – рис. 1.

В результате расчета уравнений представленной модели и уравнений Рейнольдса с моделью Спаларта–Аллмареса получается стационарное решение – рис. 2. Наблюдается, практически, линейный рост ширины области смешения.

Близость решений представленной модели и уравнений Рейнольдса с моделью Спаларта–Аллмареса демонстрирует распределение скорости в сечении  $x = 1.5$  – рис. 3

Кривая, отвечающая решению уравнений Навье–Стокса, соответствует моменту времени  $t = t1$  (рис. 1 слева), когда возмущения скорости еще не распространились до сечения  $x = 1.5$ . Дополнительным свидетельством близости решений представленной модели и уравнений Рейнольдса с моделью Спаларта–Аллмареса является распределение величины  $\frac{\partial u}{\partial y}$  в том же сечении – рис. 4.

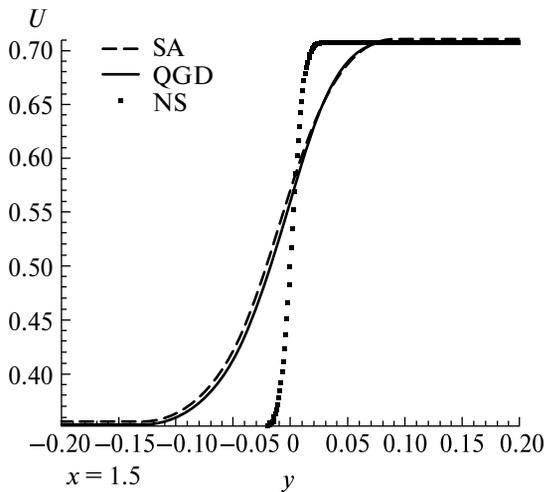


Рис. 3. Распределение скорости в сечении  $x = 1.5$ .

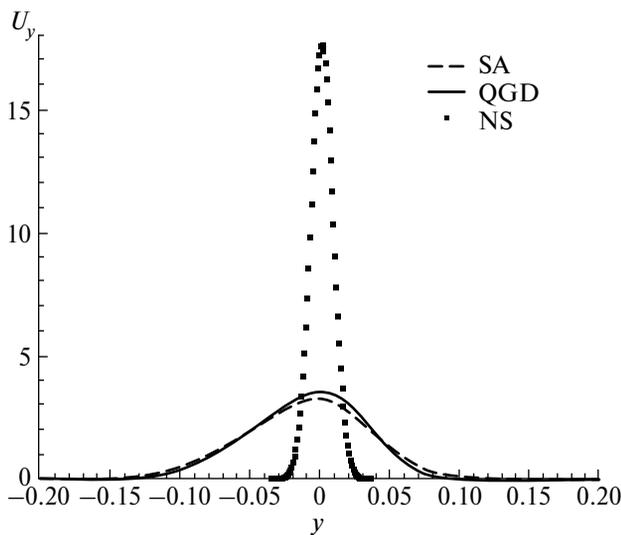


Рис. 4. Распределение величины  $\frac{du}{dy}$  в сечении  $x = 1.5$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты внушают определенный оптимизм в использовании предложенной кинетической модели. Однако полноценное включение ее в ряд используемых моделей для описания турбулентности течений требует дополнительных исследований. В частности, планируется в дальнейшем расширить круг моделируемых задач, обобщить данную модель на случай сжимаемого газа и пространственной 3D-геометрии. Предполагается также в рамках предложенной методологии получить дополнительные уравнения для моментов  $\overline{\rho \Delta u^2}$  и  $\overline{\rho \Delta v^2}$ , которые важны для нахождения кинетической энергии турбулентности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
2. Spalart P.R. and Allmaras S.R. A one equation turbulence model for aerodynamic flows // Recherche Aerospatiale. 1994. N 1. P. 5–21.
3. Shur M., Strelets M., Zaikov L., Gulyaev A., Kozlov V., Secundov A. Comparative Numerical Testing of one and two equation turbulence models for flows with separation and reattachment // AIAA Paper 95–0863, January 1995.
4. Поляков С.В., Ивахненко И.А., Четверушкин Б.Н. Квазигазодинамическая модель и мелкомасштабная турбулентность. // Математическое моделирование. 2006. Т. 20. № 2.
5. Wilcox D.E. Formulation of the K-omega turbulence model revisited // AIAA Journal. 2008. V. 46. N 11. P. 2823–2838.
6. Абалакин И.В., Антонов А.Н., Граур И.А., Четверушкин Б.Н. Использование алгебраической модели турбулентности для расчета нестационарных течений в окрестности выемок // Мат. моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 45–56.
7. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. V. 32. N 8. August 1994. P. 1598–1605.
8. Goldberg V., Perommain O., Batten P., Chakravarthy S. The k-e-Rt turbulence closure // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. 2009. V. 3. N 2. P. 175–183.
9. Abdol-Hamid K.S., Carlson J.-R. and Rumsey C.L. Verification and validation of the K-KL turbulence model in FUN 3D and CFL 3D Codes // AIAA Paper. 2016. N 3941. June 2016.
10. Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. М.: Физматлит, 1998. 343 с.
11. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс-Пресс, 2004. 328 с.
12. Гирифельдер Дж., Кертис У., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ, 1961. 916 с.
13. Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N. On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial boundary value problem // Applied Mathematics Letters. 2018. V. 83. P. 116–122.
14. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О свойствах и погрешности параболического и гиперболического порядка возмущений гиперболической системы 1-го порядка // Математический сборник. 2023. Т. 214. № 7.
15. Четверушкин Б.Н., Савельев В.И., Савельев А.В. Кинетические алгоритмы расчета течений электроприводящей жидкости на высокопроизводи-

- тельных вычислительных системах // Доклады РАН. 2019. Т. 489. № 6.
16. *Chetverushkin B.N., Saveliev A.V., Saveliev V.A.* Kinetic consistent MHD algorithm for incompressible conductive fluids // *Computer and Fluids*. 2023. V. 255.
17. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
18. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: МИР, 1973. 245 с.

## DESCRIPTION OF TURBULENT FLOWS USING A KINETIC MODEL

Academician of the RAS **B. N. Chetverushkin<sup>a, \*</sup>**, **A. E. Lutsky<sup>a, \*\*</sup>**, **E. V. Shilnikov<sup>a, \*\*\*</sup>**

<sup>a</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia*

In this paper, a closed system of equations for describing turbulent flows is obtained. Additional equations for cross pulsation moments are derived on the basis of a balanced kinetic equation, with the help of which a quasi gas-dynamic system of equations was previously obtained. The results of the calculation of the spatially two-dimensional problem of the mixing layer of two streams are presented.

*Keywords:* quasi gas-dynamic system of equations, turbulent flow, closure of the averaged equations system

УДК 511.6

## НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ СО СКОЛЬ УГОДНО БОЛЬШОЙ ДЛИНОЙ ПЕРИОДА

© 2024 г. Академик РАН В. П. Платонов<sup>1, 2, \*</sup>, Г. В. Федоров<sup>1, 3, \*\*</sup>

Поступило 15.02.2024 г.  
После доработки 25.03.2024 г.  
Принято к публикации 25.03.2024 г.

В статье доказано следующее утверждение: в любом гиперэллиптическом поле  $L$ , определенном над полем алгебраических чисел  $K$  и обладающим нетривиальными единицами кольца целых элементов поля  $L$ , найдется элемент, у которого длина периода непрерывной дроби больше любого наперед заданного числа.

*Ключевые слова:* гиперэллиптическое поле, фундаментальные единицы, унимодулярные преобразования, длина периода

DOI: 10.31857/S2686954324020093, EDN: XISPOY

Пусть  $K$  – поле характеристики 0. Бесконечное нормирование  $v_\infty$  поля  $K(x)$  определяется как  $v_\infty(P/Q) = \deg Q - \deg P$ , где  $P, Q \in K[x]$ ,  $P, Q \neq 0$ . Пусть  $f \in K[x]$  – свободный от квадратов многочлен четной степени  $2g + 2$ ,  $g \geq 0$ , причем старший коэффициент многочлена  $f(x)$  является квадратом в  $K^*$  – мультипликативной группе поля  $K$ . Тогда бесконечное нормирование  $v_\infty$  поля  $K(x)$  имеет два различных продолжения  $v_\infty^-$ ,  $v_\infty^+$  на гиперэллиптическое поле  $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ .

Обозначим  $S_\infty = \{v_\infty^-, v_\infty^+\}$ . Кольцо

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\infty &= \mathcal{O}_\infty(K) = K[x][\sqrt{f}] = \\ &= \{\omega_1 + \omega_2\sqrt{f} \mid \omega_1, \omega_2 \in K[x]\} \end{aligned}$$

называется *кольцом  $S_\infty$ -целых элементов* гиперэллиптического поля  $\mathcal{L}$  (см. [1]). Группа обратимых элементов  $\mathcal{O}_\infty^*$  кольца  $\mathcal{O}_\infty$  называется *группой*

*единиц*. Единицы  $u \in K^*$  называются *тривиальными единицами*. Если существуют нетривиальные единицы кольца  $\mathcal{O}_\infty$ , то  $\mathcal{O}_\infty^* = K^* \times \langle u_1 \rangle$ , где  $\langle u_1 \rangle$  – бесконечная циклическая группа с образующей  $u_1$ , которая называется *фундаментальной единицей*. Степенью единицы  $u = \omega_1 + \omega_2\sqrt{f}$  называется  $\deg u = \deg \omega_1$ . Наличие нетривиальных единиц кольца  $\mathcal{O}_\infty$  эквивалентно разрешимости функционального уравнения типа Пелля  $\omega_1^2 - \omega_2^2 f = \gamma$ , где при заданном многочлене  $f$  разрешимость рассматривается относительно  $\omega_1, \omega_2 \in K[x]$ ,  $\omega_2 \neq 0$ , и  $\gamma \in K^*$  (см. [2], [3]).

Теория числовых непрерывных дробей (цепных дробей) насчитывает многовековую историю. Одним из центральных утверждений этой теории является теорема Эйлера-Лагранжа о периодичности непрерывной дроби для любой числовой квадратичной иррациональности (см., например, [4]). 200 лет назад в классических работах Абеля и Чебышева было начато исследование функциональных непрерывных дробей. Основная идея перехода от числовых дробей к функциональным непрерывным дробям заключается в рассмотрении вместо кольца целых чисел – кольца многочленов  $K[x]$ , а вместо целой части действительного числа – целой части разложения функции в формальный степенной ряд из  $K((1/x))$  (см. [5]). В работе [3] доказаны в функциональном случае аналоги теоремы Эйлера-Лагранжа о периодичности непрерыв-

<sup>1</sup> Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup> Научно-технологический университет “Сириус”, Краснодарский край, г.мт Сириус, Россия

\*E-mail: platonov@niisi.ras.ru

\*\*E-mail: fedorov.gv@talantiuspeh.ru

ной дроби и известной в теории диофантовых приближений теоремы Серре об эквивалентности иррациональных чисел.

Рассмотрим поле формальных степенных рядов

$$K((1/x)) = \left\{ \sum_{j=s}^{\infty} b_j \left(\frac{1}{x}\right)^j \mid b_j \in K, b_s \neq 0, s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Поле  $\mathcal{L}$  вкладывается в  $K((1/x))$  двумя способами, соответствующими нормированиям  $v_{\infty}^{-}$ ,  $v_{\infty}^{+}$  (см., например, § 2 [6]). Для  $\beta \in \mathcal{L}$  существует единственное  $a \in K[x]$  такое, что  $v_{\infty}^{-}(\beta - a) > 0$ .

Пусть  $\beta \in \mathcal{L}$ . Положим  $\beta_0 = \beta$ ,  $a_0 = [\beta_0]_{\infty}^{-}$ . Для каждого  $j \in \mathbb{N}$  положим  $\beta_j = (\beta_{j-1} - a_{j-1})^{-1}$  и  $a_j = [\beta_j]_{\infty}^{-}$  до тех пор, пока  $a_j \neq \beta_j$ . В результате получится разложение  $\beta$  в функциональную непрерывную дробь (конечную или бесконечную), построенную в множестве формальных степенных рядов  $K((1/x))$  с помощью нормирования  $v_{\infty}^{-}$ :

$$\beta = [a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}. \quad (1)$$

Элементы  $a_j$  называются *неполными частными*,  $\beta_j$  — *полными частными* непрерывной дроби.

Непрерывная дробь (1) называется *квазипериодической*, если для некоторых  $\tau \in \mathbb{N}_0$  и  $\mu \in \mathbb{N}$  справедливо  $\beta_{\tau+\mu} = c\beta_{\tau}$  для некоторой постоянной  $c \in K^*$ . Если число  $\mu$  минимальное среди возможных, то оно называется *длиной квазипериода*, а  $c$  — *константой квазипериода*. Если существуют  $\tau \in \mathbb{N}_0$  и  $\mu \in \mathbb{N}$ , для которых  $\beta_{\tau+\mu} = \beta_{\tau}$ , то непрерывная дробь (1) называется *периодической*, а минимальное такое  $\mu$  называется *длиной периода*. Таким образом, квазипериодическая непрерывная дробь элемента  $\beta$  может быть записана следующим образом

$$\beta = \left[ a_0; a_1, \dots, a_{\tau}, \overline{a_{\tau+1}, \dots, a_{\tau+\mu}}^c \right]. \quad (2)$$

Обозначим  $J$  — якобиево многообразие гиперэллиптической кривой  $C$ , определяемой уравнением  $y^2 = f(x)$ . Для совершенного поля  $K$  существует естественное вложение группы классов дивизоров степени ноль  $\Delta^{\circ}(\mathcal{L})$  поля  $\mathcal{L}$  в  $J(K)$ , которое в рассматриваемом нами случае

является изоморфизмом (см., например, [7]). Тесная связь проблемы периодичности функциональных непрерывных дробей, проблемы поиска и построения фундаментальных единиц и  $S$ -единиц и проблемы кручения в якобианах гиперэллиптических кривых была отмечена в работах [2], [7].

В статье [8] получен удивительный результат о том, что последовательность  $\{\deg a_j\}$  степеней неполных частных непрерывной дроби функциональной квадратичной иррациональности  $\beta \in \mathcal{L}$  всегда периодическая. Доказательство опирается на неконструктивную теорему Скулема-Малера-Леха о нулях линейной рекуррентной последовательности. Это обстоятельство не позволяет сделать вывод о возможных оценках на длину периода  $\kappa(\beta)$  в последовательности  $\{\deg a_j\}$ .

Пусть  $\beta \in \mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$  является корнем уравнения

$$\Lambda_2 X^2 + 2\Lambda_1 X + \Lambda_0 = 0, \quad (3)$$

где  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \in K[x]$  в совокупности взаимно простые многочлены,  $\Lambda_0 \neq 0$ ,  $\Lambda_2 \neq 0$ . Обозначим  $d = \Lambda_1^2 - \Lambda_0\Lambda_2$  — сокращенный дискриминант уравнения (3). Поскольку  $\beta \in \mathcal{L}$ , то  $d = \omega^2 f$  для некоторого  $\omega \in K[x]$ . По Предложению 4 [9] для квазипериодичности непрерывной дроби элемента  $\beta$  необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая нетривиальная единица  $U = \Omega_1 + \Omega_2 \sqrt{f} \in \mathcal{O}_{\infty}$ , что  $\omega \mid \Omega_2$ . В статье [9] (Теорема 1) найдена оценка на длину квазипериода  $\mu(\beta)$  элемента  $\beta$  (при условии, что длина квазипериода конечна), и, в частности, получена верхняя оценка:

$$\mu(\beta) \leq \deg \Omega_2 + \max \left\{ \frac{\deg \Lambda_1}{2}, \frac{1}{2}(\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2) \right\}. \quad (4)$$

Цель настоящей статьи — изучить вопрос о достижимости верхней оценки (4), и, в частности, ответить на естественный вопрос: ограничена ли величина  $\mu_{\mathcal{L}} = \sup_{\beta \in \mathcal{L}} \mu(\beta)$  для зафиксированного гиперэллиптического поля  $\mathcal{L}$ ? Оказывается, что если в  $\mathcal{O}_{\infty} \subset \mathcal{L}$  существуют нетривиальные единицы, то  $\mu_{\mathcal{L}} = +\infty$  (см. теорему 1). Также мы докажем, что в этом случае и  $\kappa_{\mathcal{L}} = +\infty$  (см. Следствие 1), где  $\kappa_{\mathcal{L}} = \sup_{\beta \in \mathcal{L}} \kappa(\beta)$ , что частично дает ответ на вопрос из [8] о возможных значениях длин периодов последовательности степеней не-

полных частных функциональных непрерывных дробей квадратичных иррациональностей.

Для доказательства основных результатов нам необходимы следующие вспомогательные утверждения.

**Предложение 1.** Пусть элемент  $\beta \in \mathcal{L}$  является корнем квадратного уравнения (3) с сокращенным дискриминантом  $d$ . Пусть непрерывная дробь  $\beta$ , построенная в поле  $K((1/x))$ , имеет вид  $[a_0; a_1, \dots]$ . Тогда найдется номер  $j_0 \in \mathbb{N}_0$ , начиная с которого  $\deg a_j \leq (\deg d) / 2$  для всех  $j \geq j_0$ .

Доказательство предложения 1 опирается на представление полных частных  $\beta_j = (B_j + \sqrt{d}) / A_j$ , где  $A_j, B_j \in K[x]$ , и оценки степеней  $\deg A_j, \deg B_j$  (дополнительно см. предложение 5.2 [1]).

Будем говорить, что для заданного  $d \in K[x]$  уравнение

$$\Theta_1^2 - \Theta_2^2 d = \gamma \tag{5}$$

разрешимо, если найдутся соответствующие  $\Theta_1, \Theta_2 \in K[x]$ ,  $\Theta_2 \neq 0$ , и  $\gamma \in K^*$ , превращающие (5) в тождество. Тривиальные решения  $\Theta_1 \in K^*$ ,  $\Theta_2 = 0$ ,  $\gamma = \Theta_1^2$  мы не рассматриваем. Уравнение (5) называется функциональным уравнением типа Пелля.

**Предложение 2.** Пусть непрерывная дробь  $\beta \in \mathcal{L}$  квазипериодическая и имеет вид (2). Пусть  $\Theta_1$  обладает минимальной степенью среди всех нетривиальных решений  $(\Theta_1, \Theta_2, \gamma)$  уравнения (5), где  $d$  – сокращенный дискриминант квадратичной иррациональности  $\beta$ . Тогда

$$\sum_{j=\tau}^{\tau+\mu-1} \deg a_j = \deg \Theta_1.$$

Доказательство предложения 2 опирается на предложение 1 и некоторые конструкции из [6] и [10].

**Предложение 3.** Пусть выполнены условия предложения 2. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{2\deg \tilde{1}}{\deg d} \leq N \leq \deg \tilde{1}.$$

Доказательство предложения 3 следует из предложения 2 и оценок на степень неполных частных  $a_j$  из предложения 1.

Для натуральных  $n$  определим две последовательности многочленов  $T_n, Q_n \in \mathbb{Z}[x]$ :

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{0 \leq j \leq n/2} \binom{n}{2j} x^j, \\ Q_n(x) &= \sum_{0 \leq j < n/2} \binom{n}{2j+1} x^j. \end{aligned} \tag{6}$$

В статье [9] была исследована мультипликативная структура многочленов  $T_n, Q_n$  над полями алгебраических чисел, а также были получены верхние оценки длин периодов и квазипериодов непрерывных дробей элементов гиперэллиптических полей, определенных над полями алгебраических чисел.

В статье [10] была сформулирована задача об описании эллиптических и гиперэллиптических полей  $L = K(x)(\sqrt{f})$ , в которых соответствующие элементы  $\sqrt{f}$  имеют периодическое разложение в непрерывную дробь, построенную в поле  $K((x))$ . Свойства многочленов  $T_n, Q_n$  были использованы в статьях [6], [11], [12] при решении этой задачи, когда  $\deg f = 4$  и  $[K : \mathbb{Q}] \leq 2$ .

Из определения (6) следует, что  $\deg T_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $\deg Q_n = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . Многочлены  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$  могут быть выражены через композицию с круговыми многочленами, а также имеют связь с многочленами Чебышёва первого и второго рода и с многочленами Диксона. Напомним некоторые сведения о последовательностях многочленов  $T_n, Q_n$ , необходимые в настоящей работе (подробнее см. [9]).

Если  $n$  нечетное, тогда  $T_n(x) = x^{\deg Q_n} Q_n(1/x)$ ; если  $q \mid n$ , то  $T_q(x) \mid T_n(x)$ ,  $Q_q(x) \mid Q_n(x)$ . Если  $n$  четное, тогда  $T_n(x) = x^{\deg T_n} T_n(1/x)$ ; если  $n = qs$ ,  $q$  – нечетное, то  $T_s(x) \mid T_n(x)$ ,  $Q_q(x) \mid Q_n(x)$ ; если  $n = qs$ ,  $s$  – четное, то  $T_q(x) \mid Q_n(x)$ .

Положим  $L(T_n)$  – наименьшее общее кратное многочленов  $T_s$ , где  $s$  пробегает все такие делители числа  $n$ , что  $n/s$  нечетное и больше 1. Тогда корректно определен многочлен  $P(T_n) = T_n / L(T_n)$ . Положим  $\tilde{P}(T_n)(x) = x^s P(T_n)(1/x)$ , где

$s = \deg P(T_n)(x)$ . При нечетном  $n$  справедливо соотношение  $\tilde{P}(T_n)(x) \mid Q_n$ , а при четном  $n$  справедливо равенство  $\tilde{P}(T_n)(x) = P(T_n)(x)$ .

**Предложение 4.** Пусть  $n = 2^l q \in \mathbb{N}$ , где  $q$  нечетно. Тогда

- многочлены  $P(T_n)(x), \tilde{P}(T_n)(x)$  неприводимы над  $\mathbb{Q}$  и  $\deg P(T_n) = \deg \tilde{P}(T_n) = 2^{l-1} \varphi(q)$ ;
- справедливо разложение на неприводимые над  $\mathbb{Q}$  множители

$$T_n(x) = \prod_{d \mid q} P(T_{2^l d})(x) \tag{7}$$

$$Q_n(x) = 2^l \prod_{s \mid q} \tilde{P}(T_s)(x) \cdot \prod_{r \mid n} P(T_r)(x),$$

где последнее произведение берется по всем делителям  $r$  числа  $n$  таким, что  $n/r$  четно.

Доказательство предложения 4 следует из рассуждений в [6], [9], [12].

Перейдем к основному утверждению этой статьи.

**Теорема 1.** Пусть  $K$  – поле алгебраических чисел, и  $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$  – гиперэллиптическое поле такое, что в его кольце целых элементов  $\mathcal{O}_\infty$  существуют нетривиальные единицы. Тогда для любого сколь угодно большого значения  $N \in \mathbb{N}$  найдется такой элемент  $\beta \in \mathcal{L}$ , у которого длина периода непрерывной дроби конечна и больше  $N$ .

**Доказательство.** По условию в поле  $\mathcal{L}$  существует фундаментальная единица  $\Psi_1 + \Psi_2 \sqrt{f}$ , где  $\Psi_1, \Psi_2 \in K[x]$ . Пусть многочлены  $\Omega_1^{(j)}, \Omega_2^{(j)} \in K[x]$  определены так, что  $(\Psi_1 + \Psi_2 \sqrt{f})^j = \Omega_1^{(j)} + \Omega_2^{(j)} \sqrt{f}$ .

Положим  $z = \Psi_2(x)f(x) / \Psi_1^2(x)$ , тогда

$$\Omega_1^{(j)} + \Omega_2^{(j)} \sqrt{f} = \Psi_1^j (T_j(z) + Q_j(z) \sqrt{z}), \tag{8}$$

где многочлены  $T_n(x), Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , определены в (6).

По предложению 4 [9] элемент  $\beta \in \mathcal{L}$  с сокращенным дискриминантом  $d = \omega^2 f$  обладает квазипериодической непрерывной дробью, тогда и только тогда, когда найдется номер  $n \in \mathbb{N}$  такой, что  $\omega \mid \Omega_2^{(n)}$ . Наша задача – построить подходящую последовательность элементов  $\beta = \beta^{(n)} \in \mathcal{L}$ ,

у которых длины квазипериодов непрерывных дробей  $\beta^{(n)}$  стремятся к бесконечности при  $n$ , пробегающим некоторую последовательность натуральных чисел, стремящуюся к бесконечности. Для этого достаточно построить соответствующую последовательность сокращенных дискриминантов  $d^{(n)} = (\omega^{(n)})^2 f$ , где  $\omega^{(n)} \mid \Omega_2^{(n)}$ .

Рассмотрим последовательность нечетных чисел  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , для которой справедливо соотношение  $\varphi(n_k) / n_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $\varphi(n)$  – функция Эйлера. Существование такой последовательности и точные оценки на нижний предел функции  $\varphi(n) / n$  доказаны, например, в [13]. В качестве последовательности  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  можно взять, например,  $n_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$  – произведение последовательных нечетных простых чисел  $p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$ .

Пусть  $n = 2n_k$ , тогда, по предложению 4, имеем  $P(T_n)(z)$  – неприводимый над  $\mathbb{Q}$  многочлен,  $\deg P(T_n)(z) = \varphi(n_k)$ ,  $P(T_n)(z) \mid Q_{2n}(z)$ , причем  $P(T_n)(z) \nmid Q_j(z)$  при  $j < 2n$ . Обозначим  $\overline{P(T_n)}(z, v)$  – однородный многочлен, соответствующий многочлену  $P(T_n)(z)$ . В силу представления (8) и разложений (7) в качестве  $\omega^{(k)}(x)$  можно выбрать один из неприводимых над  $K$  делителей многочлена

$$(\Psi_1(x))^{2\varphi(n)} P(T_n) \left( \frac{\Psi_2^2(x)f(x)}{\Psi_1^2(x)} \right) = \overline{P(T_n)}(\Psi_2^2(x)f(x), \Psi_1^2(x)) \in \mathbb{Q}[x],$$

такой, что  $\omega^{(k)}(x) \mid \Omega_2^{(2n)}(x)$  и  $\omega^{(k)}(x) \nmid \Omega_2^{(j)}(x)$  при  $j < 2n = 4n_k$ . Справедливы оценки

$$\deg \omega^{(k)}(x) \leq 2m \deg P(T_n)(z) = 2m\varphi(n_k), \tag{9}$$

где  $\deg \Psi_1(x) = m$  – степень фундаментальной единицы  $\Psi_1 + \Psi_2 \sqrt{f}$  кольца  $\mathcal{O}_\infty$ .

Пусть  $\beta^{(k)} \in \mathcal{L}$  является корнем квадратного уравнения

$$\Lambda_2^{(k)} Y^2 + 2\Lambda_1^{(k)} Y + \Lambda_0^{(k)} = 0$$

с сокращенным дискриминантом

$$d^{(k)}(x) = (\Lambda_1^{(k)})^2 - \Lambda_0^{(k)} \Lambda_2^{(k)} = (\omega^{(k)}(x))^2 f(x),$$

где  $\Lambda_2^{(k)}, \Lambda_1^{(k)}, \Lambda_0^{(k)} \in \mathbb{Q}[x]$  в совокупности взаимно простые многочлены. Обозначим  $\Theta_1^{(2n)} = \Omega_1^{(2n)}$ ,  $\Theta_2^{(2n)} = \Omega_2^{(2n)} / \omega^{(k)}(x)$ . По предложению 3 справедливы оценки на длину квазипериода  $\mu_k$  непрерывной дроби элемента  $\beta^{(k)}$ :

$$\frac{8n_k m}{\deg d^{(k)}} = \frac{4nm}{\deg d^{(k)}} = \frac{2\deg \Theta_1^{(2n)}}{\deg d^{(k)}} \leq \leq \mu_k \leq \deg \Theta_1^{(2n)} = 2nm = 4n_k m. \tag{10}$$

Пусть  $\deg f = 2g + 2$ , тогда из (9) имеем

$$\deg d^{(k)}(x) = 2\deg \omega^{(k)}(x) + + \deg f \leq 4m\varphi(n_k) + 2g + 2. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем

$$\mu_k \geq \frac{8n_k m}{4m\varphi(n_k) + 2g + 2},$$

причем значения  $m$  и  $g$  в рассматриваемом поле  $\mathcal{L}$  определены однозначно. В силу того, что  $\varphi(n_k) / n_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , имеем  $\mu_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Теорема 1 доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $\mathcal{L}$  — гиперэллиптическое поле, определенное как в теореме 1. Тогда для любого  $N \in \mathbb{N}$  существует элемент  $\beta \in \mathcal{L}$ , для которого длина периода последовательности  $\{ \deg a_j \}$  степеней неполных частных больше  $N$ .

**Доказательство.** Будем использовать те же обозначения, как в доказательстве теоремы 1.

Обозначим  $2t = \deg d^{(k)} = \deg(\omega^{(k)})^2 f$ . Положим

$$\Lambda_1^{(k)} = \left\lfloor \sqrt{d^{(k)}} \right\rfloor_{\infty} \text{ и } \Lambda_0^{(k)} = (\Lambda_1^{(k)})^2 - d^{(k)}, \text{ тогда } \deg \Lambda_1^{(k)} = t$$

и  $\Lambda_0^{(k)} < t$ . Без ограничения общности считаем,

что старший коэффициент многочлена  $f(x)$  является полным квадратом в поле  $K$ , поэтому  $\Lambda_0^{(k)}, \Lambda_1^{(k)} \in K[x]$ . Рассмотрим  $\alpha^{(k)} = \Lambda_1^{(k)} + \sqrt{d^{(k)}}$  — корень квадратного уравнения  $Y^2 - 2\Lambda_1^{(k)}Y + + \Lambda_0^{(k)} = 0$  с дискриминантом  $d^{(k)}$ .

Непрерывная дробь  $\sqrt{d^{(k)}}$  периодическая и имеет вид (см., например, [3], теорема 3)

$$\left[ a_0; a_1, \dots, a_{\mu-1}, a_{\mu}^c \right] = \left[ a_0; a_1, \dots, c^{-1}a_1, 2ca_0 \right],$$

где  $\mu = \mu_k = \mu(\alpha^{(k)})$  — длина квазипериода,  $c$  — константа квазипериода. Значит непрерывная дробь  $\alpha^{(k)}$  чисто периодическая и имеет вид  $\left[ 2a_0, a_1, \dots, c^{-1}a_1^c \right]$ . По предложению 1 имеем  $\deg a_j \leq t$

для всех  $j \in \mathbb{N}_0$ . Более того,  $\deg a_{sN} = \deg a_0 = t$  для  $s \in \mathbb{N}$  и  $\deg a_j < t$  при  $j \in \mathbb{N}$ ,  $N \nmid j$ . Наконец, как в теореме 1 имеем  $\mu_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , откуда и получается утверждение следствия 1.  $\square$

Отсюда, в частности, следует, что в отличие от “ключевых” элементов вида  $\sqrt{f} / x^s$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ , рассмотренных в теореме 3 [9], в общем случае оценка на длину квазипериода (периода) непрерывной дроби квадратичной иррациональности не может зависеть только от параметров, характеризующих гиперэллиптическое поле  $\mathcal{L}$  таких, как род  $g$  поля  $\mathcal{L}$ , степень расширения  $[K : \mathbb{Q}]$  и степень фундаментальной единицы кольца  $\mathcal{O}_{\infty}$  целых элементов поля  $\mathcal{L}$ .

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований проект FNEF-2024-0001.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П.* Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 1. С. 15–44.
2. *Платонов В.П.* Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69. № 1(415). С. 3–38.
3. *Schmidt W.M.* On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Acta arithmetica. 2000. V. 95. N 2. P. 139–166.
4. *Ленг С.* Введение в теорию диофантовых приближений. Мир, 1970.
5. *Lasjaunias A.* A survey of diophantine approximation in fields of power series // Monatshefte für Mathematik. 2000. V. 130. P. 211–229.
6. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме классификации многочленов  $f$  с периодическим разложением  $\sqrt{f}$  в непрерывную дробь в гиперэллиптических полях // Известия РАН. Серия математическая. 2021. Т. 85. № 5. С. 152–189.
7. *Платонов В.П.* Арифметика квадратичных полей и кручение в якобианах // ДАН. 2010. Т. 430. № 3. С. 318–320.

8. *Zannier U.* Hyperelliptic continued fractions and generalized Jacobians // *American Journal of Mathematics*. 2019. V. 141. N 1. P. 1–40.
9. *Федоров Г.В.* О длине периода функциональной непрерывной дроби над числовым полем // *ДАН*. 2020. Т. 495. С. 78–81.
10. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Матем. сб.* 2018. Т. 209. № 4. С. 54–94.
11. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме классификации периодических непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Успехи математических наук*. 2020. Т. 75. № 4. С. 211–212.
12. *Федоров Г.В.* Непрерывные дроби и проблема классификации эллиптических полей над квадратичными полями констант // *Матем. заметки*. 2023. Т. 114. № 6. С. 873–893.
13. *Hardy G.H., Wright E.M.* *An Introduction to the Theory of Numbers (Fifth ed.)*. Oxford: Oxford University Press, 1979.

## CONTINUED FRACTIONS IN HYPERELLIPTIC FIELDS WITH AN ARBITRARILY LARGE PERIOD LENGTH

Academician of the RAS **V. P. Platonov<sup>a, b, \*</sup>**, **G. V. Fedorov<sup>a, c, \*</sup>**

<sup>a</sup>*Scientific Research Institute of System Development, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Steklov Institute of Mathematics, Moscow, Russia*

<sup>c</sup>*Sirius University of Science and Technology, Sirius, Krasnodar region, Russia*

The article proves the following statement: in any hyperelliptic field  $L$  defined over the field of algebraic numbers  $K$  which having non-trivial units of the ring of integer elements of the field  $L$ , there is an element for which the period length of the continued fraction is greater any pre-given number.

*Keywords:* hyperelliptic field, fundamental units, unimodular transformations, period length

УДК 517.54

## ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2024 г. М. В. Шамолин<sup>1, \*</sup>

Представлено академиком В. В. Козловым

Поступило 01.04.2024 г.

После доработки 31.04.2024 г.

Принято к публикации 27.05.2024 г.

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к трехмерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого униформного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

*Ключевые слова:* инвариант динамической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость

DOI: 10.31857/S2686954324020105, EDN: XIRKPA

### ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как известно [21–23], облегчает их исследование, а иногда позволяет и точно их проинтегрировать. Так наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт вполне естествен — когда фазовый поток сохраняет объем с постоянной плотностью. Но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, коэффициенты имеющих инвариантов должны, вообще говоря, включать функции с существенно особыми точками (см. также [24–26]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка  $m$  нужно знать  $m - 1$  независимый тензорный инвариант (первый интеграл, дифференциальная форма, векторное поле и т.д.). При этом для достижения точной интегрируемости, как правило, приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Для систем классической механики понятия “консервативность”, “силовое поле”, “дисси-

пация” и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ “в целом” начинается с исследования приведенных уравнений геодезических на поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, вводя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” —

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

\* E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого – обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметит также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела (см. также [25]).

В работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых может быть выделена система с тремя степенями свободы на своем шестимерном многообразии. Имеющееся в системе силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

## ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМ МАЛОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере систем третьего и пятого порядка. Пусть  $v, \alpha, z$  – фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой – однородные полиномы по переменным  $v, z$  с коэффициентами, зависящими от  $\alpha$ :  $\dot{v} = a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \dot{z} = d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, v\dot{\alpha} = g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2$ .

Выбирая новые независимую переменную  $q$  ( $dq = vdt, d/dq = \langle \cdot \rangle, v \neq 0$ ), а также фазовую  $Z, z = Zv$ , перепишем систему как

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad (1)$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2,$$

$$\alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \quad (2)$$

$$Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z),$$

при этом уравнение (1) на  $v$  отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (2) с одной степенью свободы на двумерном фазовом многообразии  $N^2\{Z; \alpha\}$ .

Стоит выделить случай усеченной системы, когда выполнены тождества  $d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0$ . Тогда система (1), (2) имеет аналитический первый интеграл  $\Phi_1(v; Z) = vZ = \text{const}$ . Для ее интегрируемости достаточно найти еще один первый интеграл, независимый с  $\Phi_1$ . Мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (1), (2):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) f_1(\alpha),$$

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad (3)$$

$$\Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_1(\alpha)},$$

$$\alpha' = f_1(\alpha)Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha) f_1(\alpha), \quad (4)$$

$$Z' = -Z\Psi(\alpha, Z),$$

$b_0 \geq 0$  – параметр,  $f_1(\alpha), \delta(\alpha)$  – некоторые гладкие функции, и будем рассматривать (3), (4) как систему при отсутствии внешнего поля сил.

Система (3), (4) имеет дополнительный первый интеграл:  $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 + 2b_0 Z \Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}$ . Другими словами, независимая подсистема (4) на многообразии  $N^2\{Z; \alpha\}$  имеет рациональный [27, 28] по  $Z$  (автономный) первый интеграл вида  $\Phi(Z; \alpha) = (1 + 2b_0 Z \Delta(\alpha)) / Z^2 = C = \text{const}$ , который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, у подсистемы (4) нет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака. Таким образом, внутреннее гладкое силовое поле (зависящее от параметра  $b_0 > 0$ ) в системе (3), (4) не нарушает консервативности системы.

Зададимся вопросом поиска инвариантных дифференциальных форм для системы (3), (4).

Для поиска функции  $\rho(v; \alpha, Z)$ , которая определяет искомую форму  $\rho(v; \alpha, Z)dv \wedge d\alpha \wedge dZ$ , проинтегрировано линейное уравнение  $\operatorname{div}[\rho(v; \alpha, Z)W_0(v; \alpha, Z)] = 0$  ( $W_0(v; \alpha, Z)$  – векторное поле системы). При этом, в частности, функции  $\rho_1(Z) = 1/Z^3, \rho_2(v) = v^3$  определяют искомую форму.

Система (3), (4) в зависимости от целей подвергнута различным модификациям [26], приведем одну из них. Она на прямом произведении числового луча и касательного расслоения  $TM^1\{Z; \alpha\}$  имеет два ключевых параметра  $b_0 \geq 0, b_1 \neq 0$ , и в ней введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \\ \Psi(\alpha, Z) &= -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha) \Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha), \\ Z' &= F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)},$$

$\mu > 0$ . Коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр  $b_0$ , а неконсервативной составляющей внешнего поля – параметр  $b_1$ .

**Теорема 1.** Если выполнено условие  $F(\alpha) = \lambda \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha)$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ , то система (5), (6) обладает полным набором – двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она обладает двумя инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависящими с первыми интегралами.

Одним из возможных видов инвариантной дифференциальной формы объема для системы (5), (6) является следующий:

$$\begin{aligned} \rho(v; \alpha, Z)dv \wedge d\alpha \wedge dZ &= \\ = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u - u^2} \right\} dv \wedge d\alpha \wedge dZ, \\ u &= \frac{Z}{\Delta(\alpha)}. \end{aligned}$$

Мы видим, что задача точной интегрируемости класса однородных систем третьего порядка с диссипацией путем нахождения необходимого количества инвариантов, несмотря на малый порядок системы, достаточно нетривиальна.

Аналогичный спектр вопросов качественного характера был рассмотрен и для однородных по части переменных систем пятого порядка, также

обладающих диссипацией [26]. После введения силовых полей рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательно-го расслоения  $TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$  гладкого многообразия  $M^2\{\alpha, \beta\}$  такова:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \\ \Psi(\alpha, Z) &= -b(Z_1^2 + Z_2^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha) \Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha' = Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha),$$

$$\bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)},$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= F(\alpha) - \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] \times \\ &\times Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \end{aligned}$$

$$Z_1' = - \left[ 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z),$$

$$\beta' = Z_1 \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)},$$

здесь  $\mu > 0$  – параметр,  $DQ(q) = d \ln |Q(q)| / dq$ ,  $b \geq 0$ ,  $\Delta(\alpha)$ ,  $F(\alpha)$ ,  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ ,  $i, j, k = \alpha, \beta$ , – некоторые гладкие функции. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр  $b$ , а неконсервативной составляющей внешнего поля – параметр  $b_1$ .

## СИСТЕМЫ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Пусть  $v, \alpha, \beta = (\beta_1, \beta_2)$ ,  $z = (z_1, z_2, z_3)$  – фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой – однородные полиномы по переменным  $v, z$  с коэффициентами, зависящими от  $\alpha, \beta$ . Выбирая новую независимую переменную  $q$  ( $dq = vdt$ ,  $d/dq = \langle' \rangle$ ,  $v \neq 0$ ), а также новые фазовые  $Z_k, z_k = Z_k v$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ , будем рассматривать систему седьмого порядка

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \\ \Psi(\alpha, Z) &= -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \tilde{\Delta}(\alpha) f_3(\alpha), \\ \tilde{\Delta}(\alpha) &= \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \\ \Delta(\alpha) &= \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= f_3(\alpha)Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\Delta(\alpha)f_3(\alpha), \\
Z_3' &= -f_3(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right]Z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \times \\
&\times \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)Z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha,Z), \\
Z_2' &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_2Z_3 - \\
&- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha,Z), \quad (9) \\
Z_1' &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + Dg(\beta_1)\right]Z_1Z_2 - \\
&- f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + Dg(\beta_1)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha,Z), \\
\beta_1' &= Z_2f_1(\alpha), \\
\beta_2' &= Z_1f_2(\alpha)g(\beta_1),
\end{aligned}$$

$DQ(q) = d \ln |Q(q)| / dq$ ,  $b \geq 0$ ,  $\Delta(\alpha)$ ,  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$ ,  $\Gamma_{jk}^i(\alpha,\beta)$ ,  $i, j, k = \alpha, \beta$ , — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (8) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (9) в качестве независимой системы (с тремя степенями свободы) на шестимерном многообразии  $N^6\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\} = TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$  (касательном расслоении гладкого трехмерного многообразия  $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ , см. также [27]). Рассмотрим структуру системы (9). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий с семью ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении  $TM^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$  многообразия  $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$  (в частности, на расслоении (трехмерной) поверхности вращения, пространства Лобачевского и т.д.):

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 &= 0, \\
\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 &= 0, \quad (10) \\
\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Действительно, выбрав новые координаты  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= z_3f_3(\alpha), \\
\dot{\beta}_1 &= z_2f_1(\alpha), \\
\dot{\beta}_2 &= z_1f_2(\alpha)g(\beta_1),
\end{aligned} \quad (11)$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (9)):

$$\begin{aligned}
Z_1' &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]Z_1Z_2 - \\
&- f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + Dg(\beta_1)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha,Z), \\
Z_2' &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_2Z_3 - \\
&- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha,Z), \quad (12) \\
Z_3' &= -f_3(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right]Z_3^2 - \\
&- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)Z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1) \times \\
&\times \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha,Z),
\end{aligned}$$

при этом уравнения (10) почти всюду эквивалентны совокупности (11), (12), которая, прежде всего, присутствует в системе (9) (при этом вместо (11) лучше выбрать равенства  $\alpha' = Z_3f_3(\alpha)$ ,  $\beta_1' = Z_2f_1(\alpha)$ ,  $\beta_2' = Z_1f_2(\alpha)g(\beta_1)$ ).

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (10). (а) Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного (четырёхмерного) твердого тела (см. также [29–31]). (б) Системы на касательном расслоении более общей трехмерной поверхности вращения. (в) Системы на касательном расслоении пространства Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (8), (9) также присутствуют коэффициенты при параметре  $b \geq 0$ . Но, как и в системе (3), (4), они не нарушают консервативности, поскольку система (8), (9) обладает полным набором (пятью) гладких первых интегралов.

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении трехмерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет  $n^2(n+1)/2$  штук при  $n=3$ , т.е. 18 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$  из (11)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся “лишь” 7 ( $n(n-1) + 1$  штука при  $n = 3$ ) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (10). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении – их будет 4 ( $n(n-1) / 2 + 1$  штука при  $n = 3$ ). Таким образом, мы имеем 11 функции, характеризующие исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ( $B(3)$ ) на имеющиеся  $A(3) = 11$  функций ( $A(n) = 3n(n-1) / 2 + 2$  штуки при  $n = 3$ )? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. В данной работе будем накладывать  $B(3) = 8$  условий на имеющиеся  $A(3) = 11$  функций.

Число  $B(3)$  складывается из трех слагаемых:  $B(3) = B_1(3) + B_2(3) + B_3(3)$ . Число  $B_1(3)$  равно количеству условий, накладываемых на функции  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$ , а именно,

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) =: f(\alpha), \quad (13)$$

т.е.  $B_1(3) = 1$  (в общем случае  $B_1(n) = (n-1)(n-2) / 2$ ). Число  $B_2(3)$  равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_2(\beta_1), \end{aligned} \quad (14)$$

т.е.  $B_2(3) = 3$  (в общем случае  $B_2(n) = n(n-1) / 2$ ). Число  $B_3(3)$  равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$  и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) &\equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) g^2(\beta_1) =: \Gamma_3(\alpha), \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + Df_3(\alpha) &\equiv 0, \\ f_3^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha) \Gamma_3(\alpha) &\equiv \\ \equiv 0, 2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (15)$$

т.е.  $B_3(3) = 4$  (в общем случае  $B_3(n) = n(n-1) / 2 + 1$ ).

Условия (15) опираются на (13), (14), благодаря чему количество аргументов в некоторых функциях уменьшается.

Видно, что в общем случае  $B(n) = B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = (n-1)^2 + n(n-1) / 2 + 1$ , при этом  $A(n) - B(n) = n$ , что говорит об увеличении количества “произвольных” функций по сравнению

с условиями, накладываемыми на них, ровно на  $n$  ( $n$  – размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае  $A(3) - B(3) = 3$ .

Как будет показано, для полного интегрирования системы (8), (9) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [25, 26, 27]). И то, что полный набор состоит из пяти, а не из шести, тензорных инвариантов (помимо тривиального – векторного поля самой системы [23]), показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (10), переписанных в виде  $\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, i = 1, 2, 3$ , является гладкая функция  $\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k$ , но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым “выпрямив” квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2 (справедливой и при более общих условиях) накладываются 8 алгебраических и дифференциальных соотношений (13)–(15) на 11 функций: на функции  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$  и на 7, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ .

**Теорема 2.** Если выполнены условия (13)–(15), то система (8), (9), рассмотренная на произведении  $\mathbf{R}_+^1 \{v\} \times TM^3 \{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ , обладает полным набором, состоящим из пяти гладких первых интегралов вида

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_3\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const};$$

$$\Phi_1(v; Z_3, Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) = C_1^2 = \text{const}; \quad (16)$$

$$\Phi_2(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}; \quad (17)$$

$$\Phi_3(v; Z_1; \alpha, \beta_1) = v^2 Z_1 \Delta(\alpha) \Psi(\beta_1) = C_3 = \text{const},$$

$$\Delta(\alpha) = A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad (18)$$

$$A_1 = \text{const},$$

$$\Psi(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\};$$

$$\Phi_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 - \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Psi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const.} \quad (19)$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной  $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$  и фазовых

$$\begin{aligned} w_3 &= Z_3, w_2^* = \ln|w_2|, \\ w_2 &= \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}, \\ w_1^* &= \ln\left|w_1 + \sqrt{1 + w_1^2}\right|, \\ w_1 &= \frac{Z_2}{Z_1} \end{aligned} \quad (20)$$

— фазовый поток системы (8), (9) сохраняет фазовый объем с плотностью  $\rho(v) = v^3$  на произведении  $\mathbf{R}_+^1 \{v\} \times TM^3 \{w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ , т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма  $v^3 dv \wedge dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2$ .

Заметим также, что равенство (15) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (16). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [29, 30]). Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

### ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ С ДИССИПАЦИЕЙ ЧЕРЕЗ УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Модифицируем систему (8), (9) при наличии двух ключевых параметров  $b \geq 0$ ,  $b_1 \neq 0$ , вводя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент  $F(\alpha)f_3(\alpha)$  в уравнение на  $Z_3'$  системы (21), (22) и даже положив при этом  $b_1 = 0$ , полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии:  $b = 0$ . Но мы расширим введение силового поля, положив  $b > 0$ ,  $b_1 \neq 0$ . При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимого переменного  $t$  на  $\tau$  по формуле  $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$  и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по  $\tau$ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения  $TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$  примет вид

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \\ \Psi(\alpha, Z) &= -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\bar{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \\ \bar{f}(\alpha) &= \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\bar{\Delta}(\alpha)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= F(\alpha) - \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha) \right] Z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} \times \\ &\times \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) Z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' &= -\left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] Z_2 Z_3 - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_3(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= -\left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] Z_1 Z_3 - \\ &- \frac{f_1(\alpha)}{f_3(\alpha)} \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg(\beta_1) \right] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' &= Z_2 \frac{f_1(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \\ \beta_2' &= Z_1 \frac{f_2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g(\beta_1), \end{aligned} \quad (22)$$

здесь  $\mu > 0$  — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр  $b$ , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр  $b_1$ .

Силовое поле в уравнениях на  $v'$ ,  $Z'$  определяется функцией  $\Psi(\alpha, Z)$ . Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на  $\alpha'$ , а во второй строке — коэффициенты из функции  $\Psi(\alpha, Z)$ . Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра  $b \geq 0$ ,  $b_1 \neq 0$ ,  $\mu > 0$ ) будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\bar{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $U$  — преобразование с определителем, равным  $\mu$ , и являющееся унимодулярным преобразованием при  $\mu = 1$ . В частности, если  $\mu = 1$ , а  $\Delta(\alpha) = \cos \alpha$  или  $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$ , то данное преобразование задает поворот на угол  $\alpha$ . Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [25–27]).

### ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдем теперь к интегрированию системы седьмого порядка (21), (22) при выполнении свойств (13)–(15), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы пятого порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (21), (22) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 8 алгебраических и дифференциальных соотношений (13)–(15) на 11 функций: на 4 функции  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$  и на 7, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ .

Тогда после замены фазовых переменных (20) система (21), (22) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi_0(\alpha, w), \\ \Psi_0(\alpha, w) &= -b(w_2^2 + w_3^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= w_3 + b(w_2^2 + w_3^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \\ w_3' &= F(\alpha) - \Gamma_3(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}w_2^2 - w_3\Psi_0(\alpha, w), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} w_2' &= \Gamma_3(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}w_2w_3 - w_2\Psi_0(\alpha, w), \\ w_1' &= \pm w_2\sqrt{1+w_1^2}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)], \\ \beta_1' &= \pm\frac{w_1w_2}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\beta_2' = \pm\frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}g(\beta_1). \quad (27)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (24)–(27) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (25), один – для системы (26) (после соответствующей замены независимого переменного в ней) и два дополнительных тензорных инварианта, “привязывающих” уравнения (24) и (27) (т.е. всего пять).

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого  $\kappa \in \mathbf{R}$  выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)| = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (28)$$

а для некоторого  $\lambda \in \mathbf{R}$  – равенство

$$F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \quad (29)$$

Условие (28) назовем “геометрическим”, а условие (29) – “энергетическим”. Условие (28) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности  $\Gamma_3(\alpha)$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции  $\Delta(\alpha)$  при участии функций  $f(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ , входящих в кинематические соотношения. Условие (29) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к “силовой” функции  $\Delta^2(\alpha)/2$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции  $\Delta(\alpha)$ ). При этом сама функция  $\Delta(\alpha)$ , в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [32–34]).

**Теорема 3.** Пусть для некоторых  $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$  выполняются условия (28) и (29). Тогда система (24)–(27) обладает полным набором – пятью (одним гладким и четырьмя, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает пятью инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Действительно, благодаря однородным переменным  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w_2 = u_1\Delta(\alpha)$ ,  $w_3 = u_2\Delta(\alpha)$ , из системы (25) можно получить следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta\frac{du_2}{d\Delta} &= \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta\frac{du_1}{d\Delta} &= \frac{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \end{aligned} \quad (30)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2 - \kappa u_1^2}{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \quad (31)$$

Уравнение (31) имеет вид уравнения Абеля [35–37]. В частности, при  $\kappa = -1$  оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1 \lambda \mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (32)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\begin{aligned} \Theta_1(w_3, w_2; \alpha) &= G_1 \left( \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_2}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{w_3^2 + w_2^2 + b_1 \lambda \mu w_3 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)}{w_2 \Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (33)$$

Используем для подсчета дивергенции векторного поля  $W_2(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$ ,  $w_2^* = \ln |w_2|$ ,  $w_1^* = \ln |w_1 + \sqrt{1 + w_1^2}|$ , системы (24)–(27) с диссипацией функцию  $\rho_2(v) = v^3$  (полученную для системы (8), (9)). Тогда составная система уравнений характеристик для уравнения

$$\text{div} \left[ \rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) W_2(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) \right] = 0 \quad (34)$$

будет состоять из системы (24)–(27) (правая часть которой умножена на функцию  $\rho_2(v) = v^3$ ) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho. \quad (35)$$

Системе (24)–(27), (35) уравнений характеристик можно сопоставить следующие соотношения: два из (30) и

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho [b_1 \lambda \mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2) \Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (36)$$

В общем случае искомые первые интегралы выписываются громоздко (в частности, если  $\kappa = -1$ , то используется равенство (32)). При участии уравнений (30) получается дополнительный первый интеграл системы (25), имеющий следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_3, w_2; \alpha) = G_2 \left( \Delta(\alpha), \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_2}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (37)$$

При этом (при  $\kappa = -1$ ) первый интеграл (37) найдется из уравнения Бернулли

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{du_2} &= \frac{(b_1 \lambda \mu + u_2) \Delta + \{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1 \lambda\} \Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)}, \\ (C_1, u_2) &= \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)} \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$u(u_2) = \lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2.$$

Выражение первого интеграла (37) через конечную комбинацию элементарных функций главным образом зависит от явного вида функции  $\Delta(\alpha)$ .

Кроме того, у системы (24)–(27) существует гладкий первый интеграл, который, например, при  $b = -b_1$  примет вид

$$\Theta_0(v; w_3, w_2; \alpha) = v^2 \left( \frac{1 + 2bw_3 \Delta(\alpha) - b^2 \mu (w_2^2 + w_3^2)}{\Delta(\alpha)} \right) = C_0 = \text{const}. \quad (39)$$

Первый интеграл для независимой (после замены в ней независимого переменного) подсистемы (26) будет иметь вид

$$\Theta_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\Psi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}, \quad (40)$$

о функции  $\Psi(\beta_1)$  см. (18). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (27), находится по аналогии с (19):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \mp \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi^2(b) - 1}} db = C_4 = \text{const}. \quad (41)$$

Уравнение (36), в свою очередь, позволяет получить функцию  $\rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$ , которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \exp \left\{ b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} &= C_\rho = \text{const}, \\ U_2(C_1, u_2) &= 2u(u_2) + C_1 U(C_1, u_2). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$\begin{aligned} (v; w_3; \alpha) dv \wedge d\alpha \wedge dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2, \\ u_2 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$R(v; w_3; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\}.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения (34) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = R(v; w_3; \alpha) \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4],$$

где  $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4]$  — произвольная гладкая функция пяти аргументов, при этом

$\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$  — пять независимых первых интегралов (39), (33), (37), (40), (41) соответственно.

В частности, за четыре функционально независимых решения линейного уравнения (34) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\begin{aligned}\rho_0(v; w_3, w_2; \alpha) &= R(v; w_3; \alpha) \cdot \Theta_0(v; w_3, w_2; \alpha), \\ \rho_1(v; w_3, w_2; \alpha) &= R(v; w_3; \alpha) \cdot \Theta_1(w_3, w_2; \alpha), \\ \rho_2(v; w_3, w_2; \alpha) &= R(v; w_3; \alpha) \cdot \Theta_2(w_3, w_2; \alpha), \\ \rho_3(v; w_3, w_1; \alpha, \beta_1) &= R(v; w_3; \alpha) \cdot \Theta_3(w_1; \beta_1), \\ \rho_4(v; w_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= R(v; w_3; \alpha) \cdot \Theta_4(\beta_1, \beta_2).\end{aligned}$$

### СТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Система (24)–(27) является динамической системой с переменной диссипацией [32–34]. При этом при  $F(\alpha) \equiv 0$  она превращается в систему консервативную, эквивалентную (8), (9). Последняя, в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (16), (17) в координатах  $w$ . Более того, если функция  $F(\alpha)$  не равна тождественно нулю, но  $b_1 = 0$ , то система (24)–(27) при условии (29) обладает первым интегралом вида

$$\begin{aligned}\Theta|_{B=0}(B; v; w_3, w_2; \alpha) &= \\ = v^2(w_2^2 + w_3^2 - \lambda\Delta^2(\alpha)) &= \text{const},\end{aligned}\quad (43)$$

где  $\Theta(B; v; w_3, w_2; \alpha) = v^2(w_2^2 + w_3^2 + B\lambda\mu w_3\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha))$  — семейство функций, зависящих от параметра  $B \geq 0$ .

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (43), (17) (в координатах  $w$ ) также является первым интегралом системы (24)–(27) при равенстве функции  $F(\alpha)$  тождественно нулю, но  $b_1 = 0$ . Но при  $b_1 > 0$  каждая из функций

$$\begin{aligned}\Theta|_{B=b_1}(B; v; w_3, w_2; \alpha) &= \\ = v^2(w_2^2 + w_3^2 + b_1\lambda\mu w_3\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha)) &= \text{const}\end{aligned}\quad (44)$$

и (17) (в координатах  $w$ ) по отдельности не является первым интегралом системы (24)–(27). Однако отношение функций (44), (17) (в координатах  $w$ ) является первым интегралом (33) системы (24)–(27) (для простоты, при  $\kappa = -1$ ) при любом  $b_1 > 0$ .

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций

(в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [24, 33, 34].

Выделим теперь существенные случаи для функций  $f(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ , определяющих метрику на трехмерной сфере, и функции  $\Delta(\alpha)$ :

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+v\sin^2\alpha}}, \quad v \in \mathbf{R}, \quad (45)$$

$$f_3(\alpha) \equiv -1,$$

$$\Delta(\alpha) = \sin\alpha,$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+v\sin^2\alpha}}, \quad v \in \mathbf{R}, \quad (46)$$

$$f_3(\alpha) \equiv -1,$$

а также следующий случай, имеющий самостоятельный интерес:

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= \frac{v_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + v_2}}, \\ v_1, v_2 &\in \mathbf{R}, \\ f_3(\alpha) &= v_1\alpha.\end{aligned}\quad (47)$$

Случай (45) формирует класс систем (21), (22) при  $\mu = 1$ , соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил. В частности, при  $\Delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$  рассматриваемая система описывает геодезический поток на трехмерной сфере. В случае (45), если  $\Delta(\alpha) = F(\alpha) / \cos\alpha$ , то система описывает движение четырехмерного твердого тела в силовом поле  $F(\alpha)$  под действием следящей силы [32]. В частности, если  $F(\alpha) = \sin\alpha \cos\alpha, \Delta(\alpha) = \sin\alpha$ , то система эквивалентна обобщенному сферическому маятнику, находящемуся в неконсервативном поле сил (“помещенному в поток набегающей среды”), и обладает полным набором первых интегралов с существенно особыми точками, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Случай (46) формирует класс систем (21), (22), соответствующих движению точки по трехмерной сфере с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства.

Случай (47) формирует класс систем (21), (22), соответствующих движению точки в трехмерном пространстве Лобачевского в модели Клейна.

В двух последних случаях функция  $\Delta(\alpha)$  пробегает некоторое функциональное множество.

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В данной же работе предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем седьмого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Показана связь наличия предъявляемых инвариантных форм с набором первых интегралов. Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде (см. также [38, 39, 40]).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. Paris: Gauthier-Villars, 1912.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.
6. *Шамолин М.В.* Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514. № 1. С. 98–106.
7. *Шамолин М.В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 1. С. 86–92.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
12. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 4. С. 3–229.
13. *Шамолин М.В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
14. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.
15. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
16. *Polyanin A.D. & Zaitsev V.F.* (2017). Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315117638>
17. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
18. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
19. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.
20. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 3. С. 3–237.

## INVARIANTS OF SEVENTH-ORDER HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION

M. V. Shamolin<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

New cases of integrable dynamical systems of the seventh order homogeneous in terms of variables are presented, in which a system on a tangent bundle to a three-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of a different sign. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both first integrals and invariant differential forms are given.

**Keywords:** invariant of dynamical system, essentially singular points of invariant, system with dissipation, integrability

УДК 517.5+519.213

## ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФИНИТНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2024 г. А. Д. Манов<sup>1, 2, \*</sup>

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым

Поступило 01.04.2024 г.

После доработки 31.04.2024 г.

Принято к публикации 27.05.2024 г.

В данной работе рассматривается экстремальная задача для положительно определенных функций на  $\mathbb{R}^n$  с фиксированным носителем и фиксированным значением в начале координат (класс  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ ). Требуется найти точную верхнюю грань функционала специального вида на множестве  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ . Данная задача является обобщением задачи Турана для функций с носителем в шаре. Нами получено общее решение данной задачи при  $n \neq 2$ . Как следствие, получены новые точные неравенства для производных целых функций экспоненциального сферического типа.

*Ключевые слова:* положительно определенные функции, экстремальные задачи, преобразование Фурье, целые функции экспоненциального сферического типа

DOI: 10.31857/S2686954324020118, EDN: XIIULK

Фиксируем некоторые обозначения:  $|\cdot|$  – евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{B}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$  – открытый шар радиуса  $r > 0$  с центром в нуле,  $\overline{\mathbb{B}_r}$  – его замыкание,  $\tilde{f}(x) := f(-x)$  и  $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$ ,  $L_{\infty}^{loc}(\mathbb{R}^n)$  – простран-

ство локально ограниченных п. в. на  $\mathbb{R}^n$  функций.

Комплекснозначная функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  называется положительно определённой на  $\mathbb{R}^n$  ( $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ ), если для любого  $m \in \mathbb{N}$ , и для любых элементов  $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ , а также для любого набора комплексных чисел  $\{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$  выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geq 0. \quad (1)$$

Если  $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ , то из неравенства (1) при  $m = 2$  вытекает, что  $|f(x)| \leq f(0)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  и функция  $f$  является эрмитовой, т. е.  $f = \tilde{f}$ .

Пусть  $r > 0$ . Символом  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$  обозначим множество функций  $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$  таких,

что  $\varphi(0) = 1$  и  $\text{supp } \varphi \subset \overline{\mathbb{B}_r}$ . Очевидно, что класс функций  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$  не пуст. Например, если взять функцию  $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$  такую, что  $u(x) = 0$  при  $|x| \geq r/2$  и  $\|u\|_2 = 1$ , то следующая функция принадлежит  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ :

$$\varphi(x) = (u * \tilde{u})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-t)\tilde{u}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Отметим, что при  $n = 1$  из теоремы Боаса-Каца, Крейна (см., например, [1, theorem 3.10.2]) следует, что любая функция  $\varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$  представима в виде (2). При  $n \geq 2$ , это вообще говоря, не верно. Также стоит отметить, что в работе [2] найдены необходимые и достаточные условия предствовимости функции из класса  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$  в виде самосвёртки.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу для положительно определённых функций  $\varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ .

**Задача 1.** Пусть  $r > 0$  и функция  $\rho \in L_{\infty}^{loc}(\mathbb{R}^n)$  является радиальной и вещественнозначной. Требуется найти следующую величину:

$$M(n, \rho, r) := \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \rho(x) dx \right| : \varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Донецкий государственный университет, Донецк, Донецкая народная республика

\*E-mail: manov.ad@ro.ru

Если  $\rho(x) \equiv 1$ , то величина  $M(n, \rho, r)$  была найдена Зигелем [3] в 1935 году и независимо Боасом и Кацом (см. [4, theorem 5]) в 1945 году при  $n = 1$ . В этом случае,

$$M(n, \rho, r) = \text{vol}(\mathbb{B}_{r/2}) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{2^n \Gamma(n/2 + 1)},$$

где  $\text{vol}(\cdot)$  – мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ . В этом случае, экстремальной функцией является свёртка характеристической функции шара  $\mathbb{B}_{r/2}$  с собой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{B}_{r/2})} \left( \chi_{\mathbb{B}_{r/2}} * \chi_{\mathbb{B}_{r/2}} \right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Результат Зигеля также был переоткрыт Д. В. Горбачевым [5] в 2001 году, другими методами.

Отметим, что в случае  $\rho(x) \equiv 1$ , задача 1 относится к классу экстремальных задач типа Турана. В данном типе задач требуется найти точную верхнюю грань значений интеграла  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx$  по всем функциям  $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$  с фиксированным значением в нуле, носитель которых содержится в фиксированном центрально симметричном выпуклом теле. На данный момент, помимо решения задачи Турана для случая шара, известны решения только для многогранников заполняющих пространство (см. работу В.В. Арестова, Е.Е. Бердышевой [6]), а также спектральных тел (см. работу Колунцакиса, Ревеса [7]). Отметим также работу А.В. Ефимова [9], в которой рассматривается один из вариантов задачи Турана для шара.

При  $n = 1$  и более слабых условиях на функцию  $\rho$  аналог задачи 1 был рассмотрен автором в [10]. Нами доказана следующая теорема, которая даёт решение задачи 1 при  $n \neq 2$ .

**Теорема 1.** Пусть  $n \neq 2$ ,  $r > 0$  и функция  $\rho \in L_{\infty}^{loc}(\mathbb{R}^n)$  является радиальной и вещественнозначной. Определим оператор  $A_{\rho} : L_2(\mathbb{B}_{r/2}) \rightarrow L_2(\mathbb{B}_{r/2})$  следующим образом:

$$(A_{\rho} u)(t) := \int_{\mathbb{B}_{r/2}} \rho(t-x) u(x) dx, \quad u(x) \in L_2(\mathbb{B}_{r/2}).$$

Тогда  $A_{\rho}$  – компактный самосопряжённый оператор в  $L_2(\mathbb{B}_{r/2})$  и справедливо равенство:

$$M(n, \rho, r) = \|A_{\rho}\|, \quad (3)$$

где  $\|A_{\rho}\|$  – норма оператора  $A_{\rho}$  в  $L_2(\mathbb{B}_{r/2})$ .

Из теоремы 1 следует, что решение задачи 1 сводится к нахождению наибольшего по

модулю собственного значения оператора  $A_{\rho}$ . В частности, экстремальной функцией будет нормированная самосвёртка функции  $u$ , которая отвечает наибольшему по модулю собственному значению оператора. Отметим также, что теорема 1 является аналогом теоремы Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов (см. [11, Satz IV]).

Доказательство равенства (3) в теореме 1 проводится через оценки экстремальной величины в задаче 1 сверху и снизу. Основная сложность заключается в оценке сверху, которая преодолевается сведением задачи 1 к случаю радиальных положительно определённых функций и использованием следующей теоремы.

**Теорема А** (Рудин [12], Ефимов [13]). Пусть  $n \neq 2$ ,  $r > 0$  и функция  $\varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$  является радиальной. Тогда функция  $\varphi$  представима в виде равномерно сходящегося ряда:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k * \tilde{u}_k)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где  $u_k \in L_2(\mathbb{R}^n)$  и  $u_k(x) = 0$  при  $|x| \geq r/2$ .

**Замечание 1.** При  $n = 1$  теорема выше вытекает из теоремы Боаса–Каца, Крейна. Рудин доказал теорему 1 при  $n \in \mathbb{N}$  в предположении, что функция  $\varphi$  бесконечно дифференцируемая (см. [12] и [1, theorem 3.10.4]). В работе Эма, Гнайтинга, Ричардса [14] без доказательства отмечается, что в теореме Рудина достаточно предполагать только непрерывность функции  $\varphi$ . В работе А.В. Ефимова [13] содержится доказательство теоремы 1 при  $n \geq 3$ .

Если  $\rho(x)$  – многочлен, то задача 1 связана с задачей о точечных оценках производных целых функций экспоненциального сферического типа  $\leq r$ . Напомним, что целая функция  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  называется экспоненциальной сферического типа  $\leq r$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся константа  $A_{\varepsilon} > 0$  такая, что

$$|f(z)| \leq A_{\varepsilon} e^{(r+\varepsilon)|z|},$$

$$z \in \mathbb{C}^n, \text{ где } |z| = \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Символом  $W_{p,r}(\mathbb{R}^n)$  обозначим множество целых функций экспоненциального сферического типа  $\leq r$  таких, что их сужение на  $\mathbb{R}^n$  принадлежит  $L_p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \geq 1$ , а символом  $W_{p,r}^+(\mathbb{R}^n)$  –

подмножество неотрицательных на  $\mathbb{R}^n$  функций из  $W_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ . Нами доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $r > 0$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $L$  — линейный дифференциальный оператор вида

$$L := \sum_{k=0}^m a_k \Delta^k, \text{ где } a_k \in \mathbb{R} \text{ и } \rho(x) := \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k |x|^{2k},$$

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любой функции  $f \in W_{1,r}^+(\mathbb{R}^n)$  имеет место следующее точное неравенство:

$$\|Lf\|_\infty \leq \frac{M(n, \rho, r)}{(2\pi)^n} \|f\|_1.$$

Рассмотрим некоторые примеры, когда можно выписать решения задачи 1 в явном виде.

**Пример 1.** Пусть  $n \neq 2$ ,  $r > 0$  и  $\rho(x) = |x|^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . В этом случае,

$$M(n, \rho, r) = \frac{r^{n+2} \pi^{n/2}}{2^{n+1} \Gamma(n/2)} \left( \frac{1}{n+2} + \frac{\sqrt{n(n+4)}}{n(n+4)} \right), \quad (4)$$

$$n \neq 2, r > 0.$$

**Пример 2.** Пусть  $n = 1$ ,  $r > 0$  и  $\rho(x) = x^{2m}$ , где  $m \in \mathbb{N}$ . В этом случае,

$$M(1, \rho, r) = \left( \frac{r}{2} \right)^{2m+1} |\lambda_{amax}|, \quad (5)$$

где  $\lambda_{amax}$  — наибольшее по модулю собственное значение матрицы:

$$A_m := \left( \frac{(-1)^{i+1} C_{2m}^{i-1} (1 + (-1)^{i-j})}{2m + i - j + 1} \right)_{i,j=1}^{2m+1}.$$

**Следствие 1.** Из теоремы 2 и примера 1 вытекает, что при  $n \neq 2$  для любой функции  $f \in W_{1,r}^+(\mathbb{R}^n)$  имеет место точное неравенство:

$$\|\Delta f\|_\infty \leq \frac{M(n, \rho, r)}{(2\pi)^n} \|f\|_1, \quad (6)$$

где  $M(n, \rho, r)$  определяется равенством (4).

**Следствие 2.** Из теоремы 2 и примера 2 вытекает, что при  $m \in \mathbb{N}$  для любой функции  $f \in W_{1,r}^+(\mathbb{R})$  имеет место точное неравенство:

$$\|f^{(2m)}\|_\infty \leq \frac{M(1, \rho, r)}{2\pi} \|f\|_1, \quad (7)$$

где  $M(1, \rho, r)$  определяется равенством (5).

**Замечание 2.** В работе автора [10] было доказано, что для функций  $f \in W_{1,r}^+(\mathbb{R})$  справедливы следующие точные неравенства:

$$-\frac{r^3}{12\pi} \|f\|_1 \leq -f''(t) \leq \frac{r^3(5 + 3\sqrt{5})}{120\pi} \|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Очевидно, что из (8) вытекает неравенство (6) при  $n = 1$ , а также неравенство (7) при  $m = 1$ .

**Замечание 3.** Также стоит отметить, что И. И. Ибрагимовым в 1959 было доказано (см. [15, следствие 2]), что для функций  $f \in W_{1,r}(\mathbb{R})$ , не обязательно неотрицательных, выполняются следующие неравенства:

$$\|f^{(m)}\|_\infty \leq \frac{r^{m+1}}{\pi(m+1)} \|f\|_1, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Неравенство (9) при  $m = 1$  с константой  $r^2 / \pi$  было доказано Кореваром в 1949 (см. [16]).

Неравенства вида (6), (7), (9) относятся к неравенствам типа Бернштейна–Никольского. Более подробную информацию о данном типе неравенств можно найти в статье Д. В. Горбачева [17].

**Замечание 4.** Экстремальные задачи подобного типа имеют приложения в различных разделах математики, см. например [18, 19].

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 23-11-00153).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions. Berlin, Boston: De Gruyter, 2013.
2. Akopyan R., Efimov A. Boas–Kac roots of positive definite functions of several variables // Anal. Math. 2017. V. 43. N 3. P. 359–369.
3. Siegel, C.L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. V. 65. P. 307–323.
4. Boas R.P., Jr., Kac. M. Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. V. 12. N 1. P. 189–206.
5. Горбачев Д.В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. 346–352.
6. Arestov A.A., Berdysheva E.E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. V. 8. N 3. P. 381–388.

7. *Kolountzakis M., Révész S.G.* On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 131. P. 3423–3430.
8. *Révész S.G.* Turán's extremal problem on locally compact abelian groups // Anal. Math. 2011. V. 37. N 1. P. 15–50.
9. *Ефимов А.В.* Вариант задачи Турана для положительно-определенных функций нескольких переменных // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 3. С. 136–154.
10. *Манов А.Д.* Об одной экстремальной задаче для положительно определенных функций // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. № 5. 161–171.
11. *Szász O.* Über harmonische Funktionen und L-Formen. // Math. Zeitschr. 1918. V. 1. P. 149–162.
12. *Rudin W.* An extension theorem for positive-definite functions // Duke Math. J. 1970. V. 37. P. 49–53.
13. *Ефимов А.В.* Аналог теоремы Рудина для непрерывных радиальных положительно определенных функций нескольких переменных // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 172–179.
14. *Ehm W., Gneiting T., Richards D.* Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. V. 356. P. 4655–4685.
15. *Ибрагимов И.И.* Экстремальные задачи в классе целых функций конечной степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 2. 243–256.
16. *Korevaar J.* An inequality for entire functions of exponential type // Nieuw Arch. Wiskunde. 1949. V. 23. N 2. P. 55–62.
17. *Горбачев Д.В.* Точные неравенства Бернштейна – Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. № 5. С. 58–110.
18. *Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S.* Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // JAMA. 2020. V. 140. P. 161–185.
19. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Некоторые экстремальные задачи для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Чебышевский сб. 2017. Т. 18. № 2. С. 34–53

## ON AN EXTREMAL PROBLEM FOR COMPACTLY SUPPORTED POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

A. D. Manov<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>*Saint Petersburg University, Saint Petersburg, Russia*

<sup>b</sup>*Donetsk State University, Donetsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

This article considers an extremal problem for positive definite functions on  $\mathbb{R}^n$  with a fixed support and a fixed value at the origin (the class  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ ). It is required to find the least upper bound of a special form functional over  $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ . This problem is a generalization of the Turán problem for functions with support in a ball. We have obtained a general solution to this problem for  $n \neq 2$ . As a consequence, new sharp inequalities are obtained for derivatives of entire functions of exponential spherical type.

*Keywords:* positive-definite functions, extremal problems, Fourier transform, entire functions of exponential spherical type

УДК 515.162.8

## ОБ ИНВАРИАНТЕ КРАШЕННЫХ КОС

© 2024 г. В. О. Мантуров<sup>1, 2, \*</sup>, И. М. Никонов<sup>1, 2, 3, \*\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семёновым

Поступило 21.07.2023 г.

После доработки 09.02.2024 г.

Принято к публикации 25.03.2024 г.

С помощью теории спариваний получено представление группы крашенных кос и показана его не-тривиальность.

*Ключевые слова:* коса, триангуляция Делоне, теория спариваний, пятичленное соотношение

**DOI:** 10.31857/S2686954324020129, **EDN:** XHVUPC

Косой [1] называется набор непересекающихся  $n$  гладких кривых в трехмерном пространстве, монотонных относительно одной из координат, например,  $z$ . Предполагается, что координата  $z$  меняется на каждой кривой от 0 до 1. Коса определяет динамику набора точек на плоскости, то есть семейство  $n$ -элементных подмножеств плоскости, непрерывно зависящих от параметра  $z$ : набор составляют точки косы с заданным значением координаты  $z$ . Выделяя некоторые конфигурации точек как особые, можно сопоставить косе последовательность возникающих при изменении  $z$  от 0 до 1 особенностей. Например, называя особыми наборы точек, в которой есть пара точек с совпадающей координатой  $x$ , мы получим представление Артина группы кос [2]. Другое определение особых конфигураций приводит к так называемой нерейдемейстеровской теории кос [3], примером которой является представление кос с помощью групп  $G_n^k$  и  $\Gamma_n^k$ , введенных В.О. Мантуровым [4].

Например, объявляя особыми моменты, когда происходит перестройка комбинаторной структуры триангуляции Делоне [5] набора точек, мы сопоставляем косе элемент группы  $\Gamma_n^4$ . Основным соотношением в группе  $\Gamma_n^4$  является пятичленное соотношение (рис. 2). Конструкции, удовлетворяющие пятичленному соотношению, такие как  $6j$ -символ [6], использовались для построения инвариантов трехмерных многообразий [7, 8], узлов и зацеплений [9]. В работе [10] тождество Птолемея для вписанного четырехугольника, также удовлетворяющему пятичленному соотношению, легло в основу конструкции представления группы кос в группе автоморфизмов поля рациональных функций. Данное представление возникало в работе [11].

В настоящей статье мы обобщим конструкцию работы [10] и приведем другой нетривиальный пример представлений группы кос, индуцированный пятичленным соотношением в теории спариваний [12], представляющей собой комбинаторную технику для работы со скейн-модулем скобки Кауффмана [13].

**Определение 1.** Назовем структурой пентагона тройку  $\Pi = (X, C, \{\})$ , где

- $X$  — некоторое множество (называемое множеством цветов);
- $C \subset X^{\times 3}$  — подмножество (множество допустимых комбинаций цветов), инвариантное относительно действия группы перестановок  $\Sigma_3$  на  $X^{\times 3}$ ;
- $\{\} : X^{\times 6} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция (называемая  $6j$ -символом), такая что

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт, Москва, Россия

<sup>2</sup> Магнитогорский Государственный Технический Университет им. Г.И. Носова, Лаборатория “Механика градиентных наноматериалов им. А.П. Жилиева”, Магнитогорск, Россия

<sup>3</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

\*E-mail: vomanturov@yandex.ru

\*\*E-mail: nikonov@mech.math.msu.su

(а) из  $\begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \neq 0$  следует  $(a,b,j),(c,d,j),(a,d,i), (b,c,i) \in C$ ;

$$(b) \sum_{i \in X} \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & a & k \\ b & c & i \end{Bmatrix} = \begin{cases} 1, & k = j \text{ и } (a,b,j),(c,d,j) \in C, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$(c) \sum_{m \in X} \begin{Bmatrix} a & i & m \\ d & e & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & c & l \\ d & m & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & l & k \\ e & a & m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b & c & k \\ j & a & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & c & l \\ d & e & j \end{Bmatrix}$$

**Пример 1 (Соотношение Птолемея).**

$\Pi_{P_1} = (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^{\times 3}, \{\cdot\}_{P_1})$ , где  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$  и

$$\begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix}_{P_1} = \begin{cases} 1, & ac + bd = ij, \\ 0, & ac + bd \neq ij; \end{cases}$$

Соотношение  $ac + bd = ij$  из определения  $6j$ -символа есть условие Птолемея вписанности четырехугольника со сторонами  $a, b, c, d$  и диагоналями  $i, j$  [14]. Соотношение 3 определения структуры пентагона описывает ситуацию вписанного пятиугольника со сторонами  $a, b, c, d, e$  и диагоналями  $i, j, k, l, m$ .

**Пример 2 (Теория спариваний).** Фиксируем натуральное число  $r \geq 3$ . Рассмотрим тройку  $\Pi_r = (\mathbb{N} \cup \{0\}, C_r, \{\cdot\}_r)$ , где  $C_r$  состоит из троек неотрицательных целых чисел  $a, b, c$ , удовлетворяющих следующим условиям:

1.  $a + b + c$  четно;
2.  $a + b \geq c, a + c \geq b, b + c \geq a$ ;
3.  $a + b + c \leq 2r - 4$ ,

а числа  $\begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix}_r$  – это  $q - 6j$ -символы, опре-

деленные в [12, proposition 11]. Согласно утверждениям [12, proposition 9] и [12, proposition 10],  $\Pi_r$  удовлетворяет условиям определения структуры пентагона.

Фиксируем структуру пентагона  $\Pi$ . Рассмотрим крашеную косу  $\beta$ . По определе-

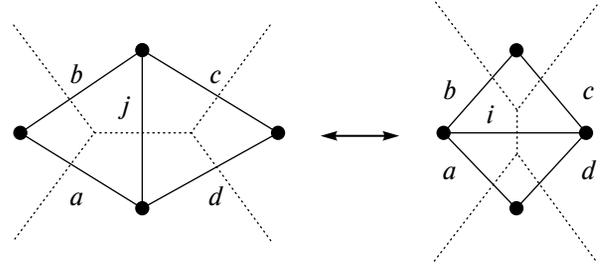


Рис. 1. Флип.

нию [15] она является набором  $n$  непересекающихся нитей

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in (\mathbb{R}^2)^n, t \in [0, 1],$$

где начальное и конечное положение точек совпадают:  $X(0) = X(1)$ . Предположим, что коса  $\beta$  находится в общем положении. Это означает, что имеется лишь конечный набор значений  $0 < t_1 < \dots < t_m < 1$ , такой что при  $t \neq t_k, k = 1, \dots, m$ , никакие четыре точки множества  $X(t)$  не лежат на одной окружности либо прямой в  $\mathbb{R}^2$ , а каждое из множеств  $X(t_k), k = 1, \dots, m$  содержит ровно одну четверку точек, лежащих на одной окружности (или прямой).

Для любого регулярного значения  $t \neq t_k$  множество  $X(t)$  задает единственную триангуляцию Делоне  $G(t)$  [5]. Обозначим множество ребер триангуляции  $G(t)$  через  $E(G(t))$ . Рассмотрим множество  $F_\Pi(t)$  допустимых раскрасок, то есть отображений  $f : E(G(t)) \rightarrow X$ , таких что для любого треугольника с ребрами  $a, b, c$  выполнено условие  $(f(a), f(b), f(c)) \in C$ . Обозначим через  $V_\Pi(t)$  линейное пространство, свободно порожденное множеством  $F_\Pi(t)$ .

Рассмотрим особое значение  $t_k, k = 1, \dots, m$ . В момент  $t_k$  происходит перестройка триангуляции (флип), см. рис. 1. Триангуляции  $G(t_k - 0)$  и  $G(t_k + 0)$  различаются на одно ребро  $j = E(G(t_k - 0)) \setminus E(G(t_k + 0)), i = E(G(t_k + 0)) \setminus E(G(t_k - 0))$ . Пусть  $a, b, c, d$  – ребра, индидентные треугольникам, содержащим ребра  $i$  или  $j$ . Для любого элемента  $f \in F_\Pi(t_k - 0)$ , рассматриваемого как базисный вектор в пространстве  $V_\Pi(t_k - 0)$ , положим

$$A_\Pi(t_k)f = \sum_{g \in F_\Pi(t_k - 0): f = g|_{E(G(t_k - 0)) \cap E(G(t_k + 0))}} \begin{Bmatrix} g(a) & g(b) & g(i) \\ f(c) & f(d) & f(j) \end{Bmatrix} \cdot g. \tag{1}$$

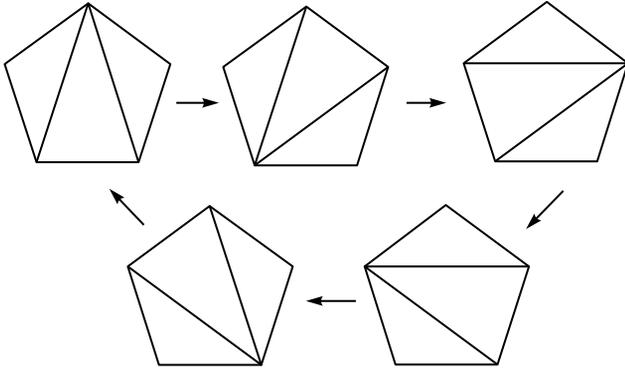


Рис. 2. Пятичленное соотношение.

Определим оператор

$$A_{\Pi}(\beta) = \prod_{k=1}^m A_{\Pi}(t_{m-k+1}) : V(X(0)) \rightarrow V(X(0)) \quad (2)$$

как композицию операторов  $A_{\Pi}(t_k)$ .

**Теорема 1.** Оператор  $A_{\Pi}(\beta)$  является инвариантом крашенных кос.

**Доказательство.** Рассмотрим изотопию крашенных кос  $\beta_s, s \in [0,1]$ . Можно считать, что это изотопия общего положения. Иными словами, изотопия имеет конечное число значений  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_p < 1$ , таких что коса  $\beta_{s_l}, 1 \leq l \leq p$ , имеет единственное значение  $t^*$ , при котором множество  $X_{s_l}(t^*)$  содержит одну из следующих вырожденных конфигураций:

1. пять точек, лежащих на одной окружности (или прямой);
2. две четверки точек, каждая из которых лежит на одной окружности. Окружности для этих двух четверок различны; четверки могут иметь общие точки.

В первом случае преобразования триангуляций Делоне в окрестности вырожденной конфигурации образуют пятиугольник (см. рис. 2). По определению оператора  $A_{\Pi}(\beta)$  соотношение пятиугольника сводится к третьему тождеству в определении структуры пентагона  $\Pi$ .

Второй случай приводит сводится к коммутационному соотношению  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ , в котором операторы  $A_1, A_2$  соответствуют флипам на заданных четверках точек. Так как ребра, меняющиеся при разных флипах различны, а условие допустимости локально, то коммутационное соотношение выполнено по определению операторов  $A_1, A_2$ .

Таким образом, мы приходим к конструкции инварианта кос  $A_{\Pi}$ , обобщающему инвариант,

рассмотренный в [3, section 16.6], где использовалось соотношение Птолемея.

Покажем, что построенный инвариант нетривиален для структуры пентагона  $\Pi_r$ .

**Пример 3.** Рассмотрим конфигурацию точек  $P_1 = (0,0), P_2 = (\frac{1}{3},0), P_3 = (\frac{2}{3},0), P_4 = (1,0), P_5 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), P_6 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ . Рассмотрим крашенные косы на трех нитях, задаваемые динамикой точек  $P_1, P_2, P_3$  внутри треугольника  $P_4 P_5 P_6$ . Пусть крашенная коса  $\beta_1$  задается движением точки  $P_2$  вокруг  $P_1$  при неподвижных остальных точках:  $P_2(t) = (\frac{\cos t}{3}, \frac{\sin t}{10}), t \in [0, 2\pi]$ ; а коса  $\beta_2$  задается движением точки  $P_3$  вокруг  $P_2$ :  $P_3(t) = (\frac{5}{12} + \frac{\cos t}{4}, \frac{\sin t}{10}), t \in [0, 2\pi]$ . Для косы  $\beta_1$  процессе движения возникает шесть различных триангуляций Делоне (для косы  $\beta_2$  — 8 триангуляций). При  $r = 5$  каждая триангуляция имеет 7520 допустимых раскрасок. Операторы  $A_{\Pi_5}(\beta_i), i = 1, 2$ , действующие в 7520-мерном пространстве, не коммутируют (расчет в программе Mathematica дает оценку  $\|A_{\Pi_5}(\beta_1)A_{\Pi_5}(\beta_2) - A_{\Pi_5}(\beta_2)A_{\Pi_5}(\beta_1)\| \approx 21.88$ ). Таким образом, представление  $A_{\Pi_5}$  некоммутативно и нетривиально. В частности, инвариант  $A_{\Pi_5}$  не сводится к индексам зацепления между нитями крашенной косы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы выражаем благодарность Луису Хиршу Кауфману, Владимиру Георгиевичу Тураеву и Елизавете Мудрой за плодотворные и стимулирующие дискуссии, а также Никите Дмитриевичу Шапошнику за замечания.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (№ 22-19-20073 от 25.03.2022 года “Комплексное исследование возможности применения самозаклинивающихся структур для повышения жесткости материалов и конструкций”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мантуров В.О. Теория узлов, М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
2. Artin E. Theory of Braids // Ann. Math. 1947. V. 48. N 1. P. 101–126.

3. *Manturov V.O., Fedoseev D., Kim S., Nikonov I.* Invariants And Pictures: Low-dimensional Topology And Combinatorial Group Theory. Series On Knots And Everything. V. 66. World Scientific, 2020.
4. *Manturov V.O., Nikonov I.M.* On braids and groups  $G_n^k$  // J. Knot Theory and Ramifications. 2015. V. 24. N 13. 1541009.
5. *Fortune S.* Voronoi diagrams and Delaunay triangulations // Computing in Euclidean Geometry. Singapore: World Scientific Publishing Co, 1992. P. 193–233.
6. *Racah G.* Theory of complex spectra II // Phys. Rev. 1942. V. 62. P. 438–462.
7. *Turaev, V.G., Viro O. Ya.* State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols // Topology. 1992. V. 31. P. 865–902.
8. *Корепанов И.Г.*  $SL(2)$ -решение уравнения пентагона и инварианты трехмерных многообразий // ТМФ. 2004. Т. 138. № 1. С. 23–34.
9. *Корепанов И.Г.* Геометрия евклидовых тетраэдров и инварианты узлов // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Т. 11. № 4. С. 105–117.
10. *Manturov V.O., Fedoseev D., Kim S., Nikonov I.* On groups  $G_n^k$  and  $\Gamma_n^k$ : A study of manifolds, dynamics, and invariants // Bull. Math. Soc. 2021. V. 11. N 2. 2150004.
11. *Penner R.* The decorated Teichmuller space of punctured surfaces // Comm. Math. Phys. 1987. V. 113. N 2. 299–339.
12. *Kauffman L.H., Lins S.* Temperley–Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds. Princeton University Press, 1994.
13. *Тураев В.Г.* Модули Конвея и Кауфмана полнотория // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1988. Т. 167. С. 79–89.
14. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия. Т. 1. М.: МЦМНО, 2004.
15. *Birman J.* Braids, Links, and Mapping Class Groups. Princeton University Press, 1974.

## ON AN INVARIANT OF PURE BRAIDS

V. O. Manturov<sup>a, b, \*</sup>, I. M. Nikonov<sup>a, b, c, \*</sup>

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia*

<sup>c</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Using the recoupling theory, we define a representation of the pure braid group and show that it is not trivial.

*Keywords:* braid, Delaunay triangulation, recoupling theory, pentagon relation

УДК 519.175.4

## МАКСИМАЛЬНЫЕ ИНДУЦИРОВАННЫЕ ДЕРЕВЬЯ В РАЗРЕЖЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФАХ

© 2024 г. Х. К. Буйтраго Оропеса<sup>1, \*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 13.03.2024 г.

После доработки 28.03.2024 г.

Принято к публикации 01.04.2024 г.

Мы доказали, что для любого  $\varepsilon > 0$  и  $n^{-\frac{e-2}{3e-2}+\varepsilon} \leq p = o(1)$ , максимальный размер индуцированного дерева в биномиальном случайном графе  $G(n, p)$  сконцентрирован в двух последовательных значениях с вероятностью, стремящейся к 1, при  $n \rightarrow \infty$ .

*Ключевые слова:* биномиальный случайный граф, максимальный подграф, концентрация

DOI: 10.31857/S2686954324020133, EDN: XHSTXC

В этой статье мы обсудим некоторые характеристики биномиального случайного графа  $G(n, p)$  (см. [1]–[6]), где  $p = p(n)$  является функцией от  $n$ . Рассмотрим набор помеченных вершин  $[n] := \{1, \dots, n\}$ . В  $G(n, p)$  каждая из  $\binom{n}{2}$  пар

вершин соединяется ребром независимо с вероятностью  $p$  (более формально,  $G(n, p)$  – это случайный элемент, принимающий значения во множестве всех графов на  $\{1, \dots, n\}$ , с распределением  $P(G(n, p) = H) = p^{e(H)}(1-p)^{\binom{n}{2}-e(H)}$ , где  $e(H)$  – количество ребер в  $H$ ).

Напомним, что множество  $U \subset [n]$  вершин графа, в котором никакие две вершины не смежны, называется *независимым множеством*. Размер наибольшего независимого множества называется *числом независимости графа*. Распределение размера самого большого независимого множества в случайном графе тщательно изучено. В [7]–[8] было доказано, что число независимости  $G(n, p = \text{const})$  с вероятностью, стре-

мящейся к 1, принимает одно из двух значений,  $f_0(n)$  и  $f_0(n) + 1$ , где

$$f_0(n) = \left\lfloor 2\log_b n - 2\log_b \log_b n + 2\log_b \frac{e}{2} + 0.9 \right\rfloor,$$
$$b = 1/(1-p).$$

Некоторые уточнения этого результата можно найти в [9]. В таких случаях говорят, что число независимости *сконцентрировано в двух точках*.

В дальнейшем концентрация в двух точках была доказана и для других характеристик случайного графа. Естественным обобщением задачи о числе независимости является следующий вопрос: каков максимальный размер *индуцированного* подграфа (множество  $A \subset V(G)$  вершин графа  $G$  индуцирует в нем подграф  $G|_A$ , множество вершин которого равно  $A$ , а множество ребер образовано всеми ребрами графа  $G$ , оба конца которых принадлежат  $A$ ) в  $G(n, p)$ , обладающего заданным свойством? В частности, верна ли концентрация в двух точках при некотором более слабом ограничении на число ребер индуцированного подграфа?

Пусть  $t: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  – некоторая функция. Пусть  $X_n[t]$  – максимальный размер  $k$  множества вершин в  $G(n, p)$ , индуцирующего подграф с не более  $t(k)$  ребрами, а  $Y_n[t]$  – максимальный размер  $k$  множества вершин в  $G(n, p)$ , индуцирующего подграф с ровно  $t(k)$  ребрами. В [10]

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), кафедра дискретной математики, лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений, Долгопрудный, Московская область, Россия

\*E-mail: buitrago.okh@phystech.edu

доказано, что при некоторых ограничениях на  $t$  величина  $X_n[t]$  сконцентрирована в двух точках.

**Теорема 1 (N. Fountoulakis, R.J. Kang, C. McDiarmid, 2014).** Пусть  $t = t(k) = o\left(\frac{k\sqrt{\ln k}}{\sqrt{\ln \ln k}}\right)$ ,  $p = \text{const} \in (0, 1)$ ,

$$f_t(n) = \left[ \begin{array}{l} 2\log_b n + (t-2)\log_b \log_b(np) - \\ -t\log_b t + t\log_b \frac{2pe}{1-p} + 2\log_b \frac{e}{2} + 0.9 \end{array} \right].$$

Тогда с вероятностью, стремящейся к 1,  $X_n[t] \in \{f_t(n), f_t(n) + 1\}$ .

С другой стороны, в [11] было доказано, что для случайной величины  $Y_n[t]$  при  $t$ , близких к  $p\binom{k}{2}$ , концентрации в конечном множестве точек нет.

**Теорема 2 (J. Balogh, M. Zhukovskii, 2019).**

Пусть  $t(k) = \binom{k}{2}p + O(k)$ .

1. Найдется такое число  $\mu > 0$ , что для любых  $c > \mu$  и  $C > 2c + \mu$  выполнено

$$\begin{aligned} & 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} P \times \\ & \times \left( n - C\sqrt{\frac{n}{\ln n}} < Y_n[t] < n - c\sqrt{\frac{n}{\ln n}} \right) \leq \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P \times \\ & \times \left( n - C\sqrt{\frac{n}{\ln n}} < Y_n[t] < n - c\sqrt{\frac{n}{\ln n}} \right) < 1. \end{aligned}$$

2. Пусть для любой последовательности  $m_k = O(\sqrt{k / \ln k})$  целых неотрицательных чисел выполнено

$$\left| \left( t(k) - \binom{k}{2}p \right) - \left( t(k - m_k) - \binom{k - m_k}{2}p \right) \right| = o(k).$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $c, C$ , что

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} P \times \\ & \times \left( n - C\sqrt{\frac{n}{\ln n}} < Y_n[t] < n - c\sqrt{\frac{n}{\ln n}} \right) > 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Наконец, в [12] была доказана концентрация случайной величины  $Y_n[t]$  при малых  $t$ .

**Теорема 3 (D. Kamalidinov, A. Skorkin, M. Zhukovskii, 2021).** Пусть  $R > 0$ . Найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что для любой последовательности неотрицательных целых чисел  $t(k)$ , удовлетворяющей следующим ограничениям:

- $|t(k+1)/t(k) - 1| \leq \frac{R}{k}$  при всех достаточно

больших  $k$ ,

- $t(k) < \varepsilon k^2$  при всех достаточно больших  $k$ , найдется  $f(n)$ , для которого справедливо  $|f(n) - 2\log_{1/(1-p)} n| \leq (3\varepsilon \ln(1/\varepsilon)) \ln n$ , и с вероятностью, стремящейся к 1,  $Y_n[t] \in \{f(n), f(n) + 1\}$ .

Кроме того, вопрос ставился и при заданных структурных свойствах индуцированного подграфа. Так, в [12] изучен максимальный размер индуцированного дерева в  $G(n, p = \text{const})$  и доказана концентрация в двух точках.

**Теорема 4 (D. Kamalidinov, A. Skorkin, M. Zhukovskii, 2021).** Пусть  $f_\varepsilon(n) = \lfloor 2\log_{1/(1-p)}(enp) + 2 + \varepsilon \rfloor$ . Тогда найдется  $\varepsilon > 0$ , при котором с вероятностью, стремящейся к 1, максимальный размер индуцированного дерева в  $G(n, p = \text{const})$  принимает одно из двух значений,  $f_\varepsilon(n)$  и  $f_\varepsilon(n) + 1$ .

В [13] аналогичный размер получен для максимального размера индуцированного леса.

**Теорема 5 (M. Krivoshepa, M. Zhukovskii, 2021).** Найдется  $\varepsilon > 0$ , при котором с вероятностью, стремящейся к 1, максимальный размер индуцированного леса в  $G(n, p = \text{const})$  принимает одно из двух значений,  $\lfloor 2\log_{1/(1-p)}(enp) + 2 + \varepsilon \rfloor$  и  $\lfloor 2\log_{1/(1-p)}(enp) + 3 + \varepsilon \rfloor$ .

Все предыдущие результаты применимы к модели случайного графа, где вероятность появления ребра является постоянной величиной. Некоторые из этих результатов были расширены для случая  $p(n) = o(1)$ . Так, в [14] было доказано, что число независимости  $G(n, p)$ , где  $n^{-2/3+\varepsilon} < p < 1 / [\log(n)]^2$ , сконцентрировано в двух точках.

**Теорема 6 (T. Bohman, J. Hofstad, 2023).** Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $n^{-2/3+\varepsilon} < p < 1 / [\log(n)]^2$ . Тогда найдется  $k_z = k_z(n) \in \mathbb{Z}$ , при котором с вероятностью, стремящейся к 1, число независимости случайного графа  $G(n, p)$  принимает одно из двух значений,  $k_z$  и  $k_z + 1$ .

Следующим естественным шагом служит получение результата о концентрации для других изученных ранее величин при  $p = o(1)$ . Отметим, что доказательства всех предыдущих результатов легко обобщаются на медленно убывающую  $p$ , а именно  $p = n^{-o(1)}$ .

В настоящей работе нам удалось доказать, что результат теоремы 4 о максимальном раз-

мере индуцированного дерева в  $G(n, p)$  можно расширить для достаточно широкого диапазона  $p = o(1)$ .

**Теорема 7.** Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $n^{-\frac{e-2}{3e-2}+\varepsilon} \leq p = o(1)$ . Тогда найдется такое  $\delta > 0$ , что с вероятностью, стремящейся к 1, максимальный размер индуцированного дерева в  $G(n, p)$  принимает одно из двух значений,  $g(n)$  и  $g(n) + 1$ , где

$$g(n) = \lfloor 2 \log_{1/(1-p)}(enp) \rfloor + \delta \lfloor n \rfloor.$$

Несмотря на то, что в основе доказательства теоремы 7 лежит стандартная техника – применение неравенства Маркова для получения верхней оценки на случайную величину и неравенства Чебышева для получения нижней – доказательство из статьи [12] для случая  $p = \text{const}$  на рассмотренный нами случай непосредственно не переносится. Проблема, как обычно, заключается в необходимости достаточно точного оценивания второго момента случайной величины  $X_k$ , равной количеству индуцированных деревьев размера  $k$ . Эту величину можно представить как сумму индикаторов  $I_{B(U)}$  по всем  $k$ -элементным множествам  $U \subset [n]$ , где  $B(U)$  – событие заключающееся в том, что  $U$  индуцирует дерево в  $G(n, p)$ . Тогда  $\mathbb{E}X_k^2 = \sum_{U, U'} \mathbb{P}(B(U) \cap B(U'))$ . Заметим, что  $\mathbb{E}X_k^2$  можно представить как

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{\ell-1} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} \binom{n-k}{k-\ell} N(k, \ell, r) p^{2(k-1)-r} \times \\ \times (1-p)^{2 \binom{k}{2} - \binom{\ell}{2} - 2(k-1)+r}$$

где  $N(k, \ell, r)$  – количество способов построить два помеченных дерева на  $k$  вершинах на заданном множестве  $2k - \ell$  вершин, пересекающихся по заданному множеству  $\ell$  вершин так, что в их пересечении находится ровно  $r$  ребер. В [12] был предложен метод оценивания  $N(k, \ell, r)$ , который работает достаточно успешно при  $p = \text{const}$ . Как только вероятность  $p = n^{-\alpha}$  становится достаточно маленькой, этот метод перестает давать достаточную оценку. Тем не менее, нам удалось доказать, что концентрация в двух точках остается верна в достаточно широком диапазоне вероятностей  $p$ , вплоть до  $n^{-\frac{e-2}{3e-2}}$ , посредством уточнения оценки величины  $N(k, \ell, r)$ . А именно, пусть  $\hat{k} = \lfloor 2 \log_{1/(1-p)}(enp) \rfloor + O(1)$  – наибольшее  $k$ , при котором  $\mathbb{E}X_k \geq 1$ . Мы доказали, что  $g(n)$  из формулировки теоремы совпадает с  $\hat{k} - 1$ . Для этого достаточно доказать, что 1)  $\mathbb{E}X_{\hat{k}+1} \rightarrow 0$ ,

2)  $\text{Var}X_{\hat{k}-1} = o((\mathbb{E}X_{\hat{k}-1})^2)$ . Первое утверждение не составляет труда, так как математическое ожидание вычисляется явно:

$$\mathbb{E}X_k = \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{\binom{k}{2}-k+1}$$

Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{\ell-1} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} \binom{n-k}{k-\ell} N(k, \ell, r) p^{(k-1)-r} \times \\ \times (1-p)^{2 \binom{k}{2} - \binom{\ell}{2} - 2(k-1)+r} = (1 + o(1)) \mathbb{E}X_k^2,$$

где  $k = \hat{k} - 1$ . Нетрудно заметить, что слагаемое при  $\ell = 0$  уже имеет необходимую асимптотку. Таким образом, остается доказать, что оставшаяся часть суммы асимптотически меньше, чем  $\mathbb{E}X_k^2$ . Мы разбили эту сумму на две части:  $\ell < \ell_0$  и  $\ell \geq \ell_0$ , где  $\ell_0 = k - O(1/p)$ , и, воспользовавшись методом из работы [12], мы доказали, что первая часть суммы достаточно мала. Для исследования второй части суммы, мы уточнили оценку величины  $N(k, \ell, r)$  с помощью формулы для числа укорененных лесов на заданном множестве размеченных вершин (см. [15]).

Sah и Sawney заметили, что после того, как  $p$  переступает пороговое значение  $n^{-2/3+o(1)}$ , число независимости перестает быть настолько хорошо сконцентрированным (см. [14, 16]). В дальнейшем было бы интересно изучить оптимальность нашего результата и установить, в какой момент максимальный размер индуцированного дерева также перестает быть сконцентрированным.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bollobás B. Random Graphs. 2nd ed. Cambridge University Press, 2001.
2. Janson S., Luczak T., Ruciński A. Random Graphs. New York: Wiley, 2000.
3. Жуковский М.Е., Райгородский А.М. Случайные графы: модели и предельные характеристики // Успехи математических наук. 2015. Т. 70. № 1. С. 35–88.
4. Деревянко Н.М., Киселев С.Г. Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа // Проблемы передачи информации. 2017. Т. 53. № 4. С. 307–318.
5. Егорова А.Н., Жуковский М.Е. Опровержение закона нуля или единицы для экзистенциальных

- монадических свойств разреженного биномиального случайного графа // Доклады Академии наук. Т. 99. № 1. С. 68–70.
6. *Ostrovsky L.B., Zhukovskii M.E.* Monadic second-order properties of very sparse random graphs // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2017. V. 168. N 11. P. 2087–2101.
  7. *Bollobás B., Erdős P.* Cliques in random graphs // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1976. V. 80. P. 419–427.
  8. *Matula D.* The largest clique size in a random graph // *Tech. Rep. Dept. Comp. Sci. Dallas, Texas: Southern Methodist University*, 1976.
  9. *Krivelevich M., Sudakov B., Vu V.H., Wormald N.C.* On the probability of independent sets in random graphs // *Random Structures & Algorithms*. 2003. V. 22. N 1. P. 1–14.
  10. *Fountoulakis N., Kang R.J., McDiarmid C.* Largest sparse subgraphs of random graphs // *European Journal of Combinatorics*. 2014. V. 35. P. 232–244.
  11. *Balogh J., Zhukovskii M.* On the sizes of large subgraphs of the binomial random graph // *Discrete Mathematics*. 2022. V. 345. N 2. 112675. ISSN 0012-365X.
  12. *Kamaldinov D., Skorkin A., Zhukovskii M.* Maximum sparse induced subgraphs of the binomial random graph with given number of edges // *Discrete Mathematics*. 2021. V. 344. N 2. 112205. ISSN 0012-365X.
  13. *Krivoshapko M., Zhukovskii M.* Maximum induced forests in random graphs // *Discrete Applied Mathematics*. 2021. V. 305. P. 211–213.
  14. *Bohman T., Hofstad J.* Two-Point Concentration of the Independence Number of the Random Graph // 2022. arXiv:2208.00117.
  15. *Moon J.W.* Counting Labelled Trees. Canadian Mathematical Monograph. 1970.
  16. *Bohman T., Warnke L., Zhu E.* Two-point concentration of the domination number of random graphs // 2024. arXiv:2401.10486.

## MAXIMUM INDUCED TREES IN SPARSE RANDOM GRAPHS

**J. C. Buitrago Oropeza<sup>a, \*</sup>**

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Department of Discrete Mathematics, Advanced Combinatorics and Network Applications Laboratory, Dolgoprudny, Moscow region, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We prove that a.a.s. for any  $\varepsilon > 0$  and  $n^{-\frac{e-2}{3e-2}+\varepsilon} \leq p = o(1)$  the maximum size of an induced subtree of the binomial random graph  $G(n, p)$  is concentrated in 2 consecutive points.

*Keywords:* binomial random graph, maximum subgraph, concentration

УДК 517.954 & 517.982

## ОБ ОЦЕНКЕ БОЯРСКОГО–МЕЙЕРСА ДЛЯ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СНОСОМ. СЛУЧАЙ КРИТИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ СОБОЛЕВА

© 2024 г. Ю. А. Алхутов<sup>1,\*</sup>, А. Г. Чечкина<sup>2,3,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 20.02.2024 г.

После доработки 25.03.2024 г.

Принято к публикации 25.03.2024 г.

Установлена повышенная суммируемость градиента решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона с младшими членами в ограниченной липшицевой области. Также приведено доказательство однозначной разрешимости этой задачи.

*Ключевые слова:* эллиптическое уравнение, младшие коэффициенты, задача Дирихле, оценка Мейерса, существование и единственность решения

DOI: 10.31857/S2686954324020149, EDN: XHSNOU

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена оценкам решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона с младшими членами вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &:= \Delta u + b \cdot \nabla u = \operatorname{div} f, \\ f &= (f_1, \dots, f_n), \\ f_j &\in L_2(D), \\ u &\in W_2^1(D). \end{aligned} \quad (1)$$

Область  $D \subset \mathbb{R}^n$ , где  $n \geq 2$ , предполагается ограниченной и липшицевой, а  $W_2^1(D)$  означает соболевское пространство функций, определяемое как пополнение финитных бесконечно дифференцируемых в области  $D$  функций по норме

$$\|v\|_{W_2^1(D)} = \left( \int_D |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Данное выражение является нормой в силу хорошо известного неравенства Фридрихса.

Нас интересует вопрос о повышенной суммируемости градиента решений задачи (1) в предположении, что функции из правой части уравнения суммируемы со степенью, большей двух. Приведем известные результаты в этом направлении для эллиптических уравнений второго порядка, не содержащих младших членов. В работе [1] рассмотрен случай линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами в плоской ограниченной области и доказана повышенная суммируемость градиента решения. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [2].

В настоящей работе, по видимому впервые, рассмотрено уравнение со сносом. Относительно младших коэффициентов уравнения (1) предполагается выполнение следующих условий:

<sup>1</sup> Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия

<sup>2</sup> Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup> Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук Уфа, Россия

\*E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

\*\*E-mail: chechkina@gmail.com

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p = n, \text{ если } n > 2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

либо

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p > 2, \text{ если } n = 2, \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Под решением задачи (1) понимается функция  $u \in W_2^1(D)$ , для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_D (b \cdot \nabla u) \varphi dx = \int_D (f \cdot \nabla \varphi) dx \quad (4)$$

для всех пробных функций  $\varphi \in W_2^1(D)$ .

Для полноты изложения приводится и доказательство существования и единственности решения задачи Дирихле при выполнении условий (2) и (3).

Сформулируем основные утверждения.

**Теорема 1.** Если  $n > 2$ , выполнено условие (2) и  $f \in (L_{2+\delta_0}(D))^n$ , где  $\delta_0 > 0$ , то существуют положительные постоянные  $\delta(n, \delta_0) < \delta_0$  и  $C$  такие, что для решения задачи Дирихле для уравнения (1) справедлива оценка

$$\alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha^{-1} |\xi|^2 \text{ для почти всех } x \in D \text{ и для всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

При этом константа  $C$  в (5) или в (6) будет дополнительно зависеть от постоянных эллиптичности матрицы  $A$ .

При  $n > 2$  будем пользоваться следующим представлением младших коэффициентов  $b \in (L_n(D))^n$  рассматриваемого уравнения

$$b = \check{b} + \hat{b}, \quad \check{b} \in (L_\infty(D))^n, \quad \hat{b} \in (L_n(D))^n, \quad \|\hat{b}\|_{L_n(D)} \leq \theta \quad (8)$$

с достаточно малой постоянной  $\theta \in (0, 1)$ , которая определяется в дальнейших рассуждениях.

## 2. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе однозначная разрешимость задачи Дирихле в произвольной ограниченной области доказывается для уравнения вида

$$\int_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} dx, \quad (5)$$

где  $C$  зависит только от  $\delta_0$ , размерности пространства  $n$ , области  $D$  и  $\|b\|_{L_n(D)}$ .

**Теорема 2.** Если  $n = 2$ , выполнено условие (3),  $f \in (L_{2+\delta_0}(D))^2$ , где  $\delta_0 > 0$ , то существуют положительные постоянные  $\delta(p, \delta_0) < \delta_0$  и  $C$  такие, что для решения задачи Дирихле для уравнения (1) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} dx, \quad (6)$$

где  $C$  зависит только от  $\delta_0$  а также от области  $D$  и  $\|b\|_{L_p(D)}$ .

**Замечание 1.** Теорема остаётся в силе, если вместо оператора Лапласа рассмотреть линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка вида

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u).$$

Здесь  $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$  – равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, то есть  $a_{ij} = a_{ji}$  и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &:= \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u = \operatorname{div}f, \\ f &= (f_1, \dots, f_n), \\ f_j &\in L_2(D), \\ u &\in W_2^1(D), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$  – равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, то есть  $a_{ij} = a_{ji}$ , удовлетворяющая (7), а  $b$  удовлетворяет (2) или (3). Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.** Если выполнены условия (2) либо (3) и (7), то задача (1) однозначно разрешима в  $W_2^1(D)$  и для ее решения справедлива оценка

$$\|\nabla u\|_{L_2(D)} \leq C \|f\|_{L_2(D)} \quad (10)$$

с постоянной  $C$ , зависящей только от коэффициентов оператора  $\mathcal{L}$ , области  $D$  и размерности пространства  $n$ .

Доказательство основано на вспомогательных утверждениях. Сначала нам потребуются оценки билинейной формы, связанной с оператором  $\mathcal{L}$ , имеющую вид

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_D a \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_D (b \cdot \nabla u) v dx \quad (11)$$

и определенную на функциях  $u, v \in W_2^1(D)$ . Имеют место следующие утверждения.

**Лемма 1.** Если коэффициенты оператора  $\mathcal{L}$  из (9) удовлетворяют условиям (2) (или (3)) и (7), то

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \frac{\alpha}{2} \int_D |\nabla u|^2 dx - C(\alpha, b, n) \int_D u^2 dx. \quad (12)$$

**Лемма 2.** Если коэффициенты оператора  $\mathcal{L}$  из (9) удовлетворяют условиям (2) (или (3)) и (7), то

для фиксированного  $u \in W_2^1(D)$  отображение  $v \mapsto \mathcal{L}(u, v)$ , где форма  $\mathcal{L}(u, v)$  определена в (11), является ограниченным линейным функционалом на  $W_2^1(D)$  и справедлива оценка

$$|\mathcal{L}(u, v)| \leq C(\alpha, b, n) \|u\|_{W_2^1(D)} \|v\|_{W_2^1(D)}. \quad (13)$$

В следующей лемме устанавливается принцип максимума для решений однородной задачи

(9). Функция  $u \in W_2^1(D)$  называется субрешением однородной задачи (9) в области  $D$ , если

$$\int_D a \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_D (b \cdot \nabla u) \varphi dx \leq 0$$

для любой неотрицательной функции  $\varphi \in W_2^1(D)$ .

Аналогично определяется суперрешение  $u \in W_2^1(D)$  в области  $D$ , для которого выполнено неравенство

$$\int_D a \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_D (b \cdot \nabla u) \varphi dx \geq 0$$

для всех неотрицательных функций  $\varphi \in W_2^1(D)$ .

**Лемма 3.** Если выполнены условия (2) (или (3)) и (7), функция  $u \in W_2^1(D)$  является субрешением в области  $D$ , то

$$\operatorname{esssup}_D u \leq 0. \quad (14)$$

Если же  $u \in W_2^1(D)$  является суперрешением в области  $D$ , то

$$\operatorname{ess\,inf}_D u \geq 0. \quad (15)$$

**Следствие 1.** При выполнении условий (2) либо (3) и (7) задача Дирихле (9) имеет единственное решение.

**Доказательство теоремы 3.** Исходя из сформулированных оценок лемм 1 – 3 и дословно повторяя рассуждения из [3, 8.2], приходим к утверждению теоремы.  $\square$

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство обеих теорем основано на получении обратного неравенства Гёльдера для градиента решения задачи Дирихле (1) с последующим применением обобщённой леммы Геринга.

**Доказательство теоремы 1.** Обозначим через  $Q_R^{x_0}$  открытый куб с центром в точке  $x_0$  и рёбрами длиной  $2R$ , где  $R \leq 1$ , которые параллельны координатным осям. Ниже полагается

$$\int_{Q_R^{x_0}} f dx = \frac{1}{|Q_R^{x_0}|} \int_{Q_R^{x_0}} f dx,$$

где  $|E|$  обозначает  $n$ -мерную меру Лебега множества  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Продолжим функцию  $u$  нулём вне области  $D$ . Сначала рассмотрим случай, когда  $Q_{3R/2}^{x_0} \subset D$  и выберем в интегральном тождестве (4) пробную функцию  $\varphi = (u - \lambda)\eta^2$ , где

$$\lambda = \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} u dx,$$

а срезающая функция  $\eta \in C_0^\infty(Q_{3R/2}^{x_0})$  такова, что  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta = 1$  в  $Q_R^{x_0}$  и  $|\nabla \eta| \leq CR^{-1}$ . Тогда (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx &= \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} (b \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx - 2 \times \\ &\times \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} \eta(u - \lambda)\nabla u \cdot \nabla \eta dx + \\ &+ 2 \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} f(u - \lambda)\eta \cdot \nabla \eta dx + \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} \eta^2 f \cdot \nabla u dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим сначала первое слагаемое в правой части тождества (16), имея в виду, что  $n > 2$ . Из представления младших коэффициентов (8) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (b \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx = \\ & = \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\tilde{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx + \\ & + \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\hat{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx. \end{aligned} \tag{17}$$

Для первого интеграла из правой части в (17) после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\tilde{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq \\ & \leq \varepsilon \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + C(\varepsilon) \|\tilde{b}\|_{L^\infty(D)}^2 R^{-2} \times \\ & \times \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx. \end{aligned} \tag{18}$$

Второй интеграл в правой части (17) оценим с помощью неравенства Гёльдера и Соболева, в силу которого

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\hat{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq \\ & \leq C(n)\theta \left( \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2 dx \right). \end{aligned} \tag{19}$$

В итоге, из оценок (18) и (19) в силу (17) с учетом выбора срезающей функции  $\eta$  будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (b \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq \\ & \leq (\varepsilon + C(n)\theta) \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + \\ & + \left( C(\varepsilon) \|\tilde{b}\|_{L^\infty(D)}^2 + C(n)\theta \right) R^{-2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx. \end{aligned} \tag{20}$$

Оценим теперь оставшиеся интегралы в правой части интегрального равенства (16). Для второго слагаемого получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta(u - \lambda)\nabla u \cdot \nabla \eta dx \right| \leq \varepsilon \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dy + \\ & + \frac{C(\varepsilon)}{R^2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx. \end{aligned} \tag{21}$$

Третье слагаемое оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} f(u - \lambda)\eta \cdot \nabla \eta dx \right| \leq \\ & \leq \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |f|^2 dx + \frac{C}{R^2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx. \end{aligned} \tag{22}$$

Для четвертого слагаемого выводим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta^2 f \cdot \nabla u dx \right| \leq \\ & \leq \varepsilon \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + C(\varepsilon) \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |f|^2 dx. \end{aligned} \tag{23}$$

В результате, пользуясь (16), учитывая последние оценки (20)–(23), после соответствующего выбора  $\varepsilon$  и  $\theta$  приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \leq \\ & \leq C(n, b) \left( \frac{1}{R^2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx + \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |f|^2 dx \right). \end{aligned} \tag{24}$$

Далее, из неравенства Пуанкаре—Соболева

$$\begin{aligned} & \left( \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx \right)^{1/2} \leq C(n)R \left( \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q}, \\ & q = \frac{2n}{n+2} \end{aligned}$$

и из (24) найдем

$$\left( \int_{Q_R^{y_0}} f |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \leq C(n,b) \left[ \left( \int_{Q_{2R}^{y_0}} f |\nabla u|^q dx \right)^{1/q} + \left( \int_{Q_{2R}^{y_0}} f |f|^2 dx \right)^{1/2} \right]. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $Q_{3R/2}^{y_0} \cap \partial D \neq \emptyset$ . Выбирая в интегральном тождестве (4) пробную функцию  $\varphi = u\eta^2$  с той же срезающей функцией  $\eta$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx &= \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} b \cdot \nabla u u \eta^2 dx - \\ &- 2 \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta u \nabla u \cdot \nabla \eta dx - \\ &- 2 \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} f u \eta \cdot \nabla \eta dx - \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta^2 f \cdot \nabla u dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Все интегралы в правой части (26) оцениваются точно так же как и выше вплоть до (24). В результате приходим к оценке (24), в которой  $\lambda = 0$ . Перепишем эту оценку в виде

$$\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C(n,b) \left[ \frac{1}{R^2} \int_{Q_{2R}^{y_0}} u^2 dx + \int_{Q_{2R}^{y_0}} |f|^2 dx \right]. \quad (27)$$

Далее заметим, что поскольку  $Q_{3R/2}^{x_0} \cap \partial D \neq \emptyset$  и область  $D$  липшицева, то  $|(\mathbb{R}^n \setminus D) \cap \bar{Q}_{2R}^{x_0}| \geq c(D)R^n$  для достаточно малого  $R$ . Поэтому по неравенству Соболева

$$\left( \int_{Q_{2R}^{x_0}} f u^2 dx \right)^{1/2} \leq C(n,D)R \left( \int_{Q_{2R}^{x_0}} f |\nabla u|^q dx \right)^{1/q}. \quad (28)$$

Откуда вновь приходим к оценке (25). Ясно, что оценка (25) выполнена и для кубов с центрами, лежащими вне области  $D$ . Таким образом, оценка (25) справедлива во всех рассматриваемых случаях.

Из (25) оценки, справедливой для всех рассматриваемых кубов  $Q_R^{y_0}$ , и обобщённой леммы Геринга (см. [4], [5], а также [6, гл. VII]) вытекает, что в предположении  $f \in L_{2+\delta_0}(D)$ , где  $\delta_0 > 0$ , имеет место оценка

$$\|\nabla u\|_{L_{2+\delta}(D)} \leq C(n,b,\delta_0,D) \left( \|\nabla u\|_{L_2(D)} + \|f\|_{L_{2+\delta}(D)} \right). \quad (29)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (29) с помощью оценки (10) теоремы 3. Теорема доказана.  $\square$

**Доказательство теоремы 2.** Схема рассуждений остается такой же, как и в доказательстве теоремы 1. Отличие состоит только в другом способе оценки первого интеграла в правой части интегральных равенств (16) и (26).  $\square$

Некоторые близкие результаты см. в [7] и [8].

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Результаты работы получены в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43. № 85. С. 451–503
2. Meyers N.G. An  $L^p$ -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e serie. 1963. V. 17. N 3. P. 189–206.
3. Гилберг Д., Трудингер Н.С. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
4. Gehring F.W. The  $L_p$ -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
5. Giaquinta M., Modica G. Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems // Journ. für die reine und angewandte Math. 1979. V. 311/312. P. 145–169.
6. Skrypnik I.V. Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems, Translations of Math. Monographs, AMS, Providence. 1994. V. 139. 1994.
7. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary // Mathematics. 2021. V. 9. N 23. Art number 3015.
8. Чечкин Г.А., Чечкина Т.П. Оценка Боярского–Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера // Проблемы математического анализа. 2022. Т. 119. С. 107–116.

**ON THE BOYARSKY–MEYERS ESTIMATE FOR THE GRADIENT  
OF THE SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM  
FOR THE SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION WITH DRIFT.  
THE CASE THE CRITICAL SOBOLEV EXPONEN**

**Yu. A. Alkhutov<sup>a, \*</sup>, A.G. Chechkina<sup>b, c, \*\*</sup>**

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

<sup>a</sup>*Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia*

<sup>b</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>c</sup>*Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center  
of the Russian Academy of Sciences Ufa, Russia*

The increased integrability of the gradient of the solution to the Increased integrability of the gradient o the solution to the homogeneous Dirichlet problem for the Poisson equation with lower terms in a bounded Lipschitz domain is established. A proof of the unique solvability of this problem is also given.

*Keywords:* elliptic equation, lower coefficients, Dirichlet problem, Meyers estimate, existence and uniqueness of solution

УДК 517.44

## ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНА, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

© 2024 г. Д. С. Аниконов<sup>1,\*</sup>, Д. С. Коновалова<sup>1</sup>

Представлено академиком РАН В.Г. Романовым

Поступило 05.02.2024 г.

После доработки 04.04.2024 г.

Принято к публикации 04.04.2024 г.

Настоящее сообщение посвящено некоторым вопросам обращения классического и обобщенного интегрального преобразования Радона. Основной вопрос состоит в определении информации об подынтегральной функции, если известны значения некоторых интегралов. Особенностью работы авторов этого сообщения является анализ случая, когда интегрирование функции производится по гиперплоскостям в конечномерном евклидовом пространстве, а подынтегральные функции зависят не только от переменных интегрирования, но и от части переменных, характеризующих гиперплоскости. При этом количество независимых переменных, описывающих известные интегралы меньше, чем у неизвестной подынтегральной функции. Мы рассматриваем разрывные подынтегральные функции, определенные на специально введенных псевдовыпуклых множествах. Ставится задача типа Стефана о нахождении поверхностей разрывов подынтегральной функции. В работе приводятся формулы, основанные на применении специальных интегро-дифференциальных операторов к известным данным и позволяющие решать поставленную задачу.

*Ключевые слова:* обобщенное преобразование Радона, интегральная геометрия, зондирование, томография, дифференциальное уравнение, разрывные функции

DOI: 10.31857/S2686954324020151, EDN: XHRLEE

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа относится к теории интегральной геометрии, в которой известными данными являются интегралы от некоторых функций, взятых вдоль определенных многообразий в конечномерном евклидовом пространстве. В широком смысле, искомым объектом являются полезные сведения о подынтегральном выражении. Результаты этой теории используются для анализа решений дифференциальных уравнений, а также в теории зондирования.

Не ставя себе задачу привести подробный обзор темы, укажем лишь на отдельные работы основоположников, таких как Р. Курант [1], Ф. Йон [2], И.М. Гельфанд [3]. Упомянем также родственные исследования математической школы М.М. Лаврентьева и В.Г. Романова, посвященные обратным задачам для уравнений

математической физики [4,5]. Вообще, имеется значительное количество исследований, посвященных преобразованиям Радона при довольно общих предположениях. К ним можно отнести, например, работы [6–12]. Однако, формулы, пригодные для построения численных алгоритмов, доказаны только для гладких функций, что несколько снижает их прикладную ценность.

Вообще, выбор ограничений обычно диктуется прогнозируемой целью применения. Цель настоящего исследования состоит в обосновании возможности применения теоретических результатов на практике, в особенности в теории зондирования. Стремясь использовать реалистические ограничения, мы рассматриваем разрывные подынтегральные функции, определенные на специально введенных псевдовыпуклых множествах. Тогда становится возможным поставить задачу о нахождении только поверхностей разрывов подынтегральной функции, что представляет собой ценную информацию. Например, в рентгеновской томографии такая информация является основным объектом поиска. Спецификой работ авторов этого сообщения

<sup>1</sup> Институт математики им. С.Л. Соболева  
Сибирского отделения Российской академии наук,  
Новосибирск, Россия

\*E-mail: anik@math.nsc.ru

является анализ обобщенного преобразования Радона, когда интегрирование функции производится по гиперплоскостям в  $n$ - мерном евклидовом пространстве, а подынтегральная функция является произведением неизвестной весовой функции, зависящей от  $2n$  переменных и другой неизвестной функции  $n$  переменных. Такая ситуация возникает, например, в рентгеновской томографии, при использовании математической модели, учитывающей рассеяние фотонов в зондируемой среде или при наличии внутренних источников.

Настоящее сообщение является продолжением и развитием предыдущих исследований авторов [13–15].

## 2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

В работе используются следующее обозначения:  $E_n, n \geq 2$ , –  $n$ -мерное евклидово пространство,  $B(x, \delta) = \{y : y \in E_n, |y - x| < \delta, x \in E_n\}$ ;  $\partial T$  – граница множества  $T$ ;  $\rho(x, T)$  – расстояние от точки  $x$  до множества  $T$ ;  $\Omega$  – единичная сфера в  $E_n$ ;  $\Delta_x$  – оператор Лапласа по переменной  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ;  $\nabla_x$  – градиент;  $\mu_k(T)$  –  $k$ -мерная Лебегова мера множества  $T$ ;  $\mu_\Omega(W)$  – мера Лебега множества  $W \subset \Omega$  по мере, определенной на сфере  $\Omega$ . Условимся считать, что мера пустого множества равна нулю.

Пусть  $G$  – ограниченная область в  $E_n$ , содержащая попарно не пересекающиеся области  $G_i, i = 1, \dots, l$ . Обозначая объединение этих областей через  $G_0$ , предположим, что  $\bar{G}_0 = \bar{G}$ . Каждую границу  $\partial G_i$  считаем  $(n-1)$ - мерной непрерывной замкнутой поверхностью. Легко видеть, что  $\partial G_0$  совпадает с объединением поверхностей  $\partial G_i, i = 1, \dots, l$ . Гиперплоскости в  $E_n$  обозначаем  $Y(x, \omega) = \{y : y \in E_n, (y - x) \cdot \omega = 0\}$ , а также  $L(\omega, p) = \{y : y \in E_n, y \cdot \omega = p\}$ . Ясно, что  $L(\omega, x \cdot \omega) = Y(x, \omega)$ .

Введем еще одно дополнительное ограничение для множества  $G_0$ . Будем говорить, что  $G_0$  – псевдовыпуклое множество, если можно указать множество  $\Omega'$ ,  $\Omega' \subset \Omega$  и функции  $p^+(\omega)$ ,  $p^-(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega'$ , для которых выполняются следующие свойства.

1. Мера множества  $\Omega \setminus \Omega'$  равна нулю, т.е.  $\mu_\Omega(\Omega \setminus \Omega') = 0$ .

2. Для любого вектора  $\omega \in \Omega'$  и для всех  $p \geq p^+(\omega)$ ,  $p \leq p^-(\omega)$  верно равенство  $L(\omega, p) \cap G = \emptyset$ .

3. Для всех  $\omega \in \Omega'$  и для всех  $p^-(\omega) < p < p^+(\omega)$  пересечение  $L(\omega, p) \cap G_0$  либо пустое множество, либо является множеством, граница которого имеет нулевую меру по мере пространства  $E_{n-1}$ , и  $\mu_{n-1}(L(\omega, p) \cap \partial G_0) = 0$ .

4. Для всех  $\omega \in \Omega'$ , если  $p \rightarrow p^+(\omega)$  или  $p \rightarrow p^-(\omega)$ , то  $\mu_{n-1}(L(\omega, p) \cap G) \rightarrow 0$ .

В качестве пояснения определения псевдовыпуклого множества приведем простой, но характерный пример.

Пример. Пусть  $n = 2$ ,  $\delta > 0$ ,  $G = B(0, 4\delta)$ ,  $G_1 = \{y : y \in E_2, \delta < y_i < 2\delta, i = 1, 2\}$ ,  $G_2 = B(0, \delta)$ ,  $G_3 = G \setminus \overline{G_1 \cup G_2}$ . Тогда из сферы  $\Omega$  достаточно убрать вектора, коллинеарные координатным осям, чтобы получить  $\Omega'$  и псевдовыпуклое множество  $G_0 = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ .

Вообще, введенное определение охватывает многие случаи ограничений, адекватных теории зондирования. Авторам не удалось придумать контрпример, в рамках разумных предположений для теории зондирования. Везде далее в этой работе будем считать множество  $G_0$  псевдовыпуклым.

Точку  $z \in \partial G_0$  назовем контактной, если она принадлежит общему участку границы ровно двух множеств  $G_i$  и  $G_j$ ,  $1 \leq i, j \leq l$ . Условимся использовать букву  $z$  только для обозначения контактных точек. Если же упомянутый общий участок границ в некоторой окрестности точки  $z$  является гладкой поверхностью класса  $C^2$ , то такой частный случай контактной точки будем обозначать через  $Z$ . Предполагаем, что множество контактных точек  $z$  плотно в  $\partial G_0 \setminus \partial G$ . В четномерном случае дополнительно к этому потребуем, чтобы и множество контактных точек типа  $Z$  также было плотно в  $\partial G_0 \setminus \partial G$ .

Рассмотрим класс  $M$  функций  $\lambda(y)$ ,  $y \in E_n$ , непрерывных и ограниченных для  $y \in G_0$  и для которых выполнены соотношения  $|\lambda(y) - \lambda(\tilde{y})| \leq \text{const} |y - \tilde{y}|^\alpha$ ,  $\text{const} > 0$ ,  $y, \tilde{y} \in G_i$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, l$ ;  $\lambda(y) = 0$ ,  $y \notin G$ .

Ясно, что для таких  $\lambda(y)$  и для каждого  $i, 1 \leq i \leq l$ , существуют предельные конечные граничные значения  $[\lambda(z)]_i$ ,  $z \in \partial G_i$ , т.е.  $\lambda(y) \rightarrow [\lambda(z)]_i$  при  $y \rightarrow z, y \in G_i$ . В контактных точках  $z \in \partial G_0$  определим скачки функции равенствами  $[\lambda(z)]_{j,i} = [\lambda(z)]_j - [\lambda(z)]_i$ ,  $1 \leq i, j \leq l$ ,  $z \in \partial G_i \cap \partial G_j$ .

Для функции  $F(x, y)$ , непрерывной и ограниченной при  $(x, y) \in E_n \times E_n$  и для  $\lambda \in M$ , определим обобщенное преобразование Радона формулой

$$[V\lambda](x, \omega) = \int_{(y-x) \cdot \omega = 0} F(x, y) \lambda(y) d_y \sigma, x \in G, \omega \in \Omega. \quad (1)$$

Здесь интегрирование производится по гиперплоскостям  $Y(x, \omega) = \{y : y \in E_n, (y - x) \cdot \omega = 0\}$ . Ясно, что ограничения для функций  $F, \lambda$  достаточны для существования интеграла в правой части формулы (1). Нередко в научной литературе функцию  $F$  называют весом, а функцию  $\lambda$  плотностью.

Классическое преобразование Радона запишем в виде

$$[R\lambda](\omega, p) = \int_{y \cdot \omega = p} \lambda(y) d_y \sigma, \omega \in \Omega, -\infty < p < \infty.$$

Легко видеть, что,  $[V\lambda](x, \omega) = [R\lambda](\omega, x \cdot \omega)$ , если  $F(x, y) = 1$ .

В качестве иллюстрации рассмотрим одну из математических моделей рентгеновской томографии. Для обобщенного преобразования Радона при  $n = 2$  возьмем весовую функцию в виде

$$F(x, y) = -\exp\left(|y - x| \int_0^1 a(tx + (1-t)y) dt\right),$$

где функция  $a(y)$  интерпретируется как коэффициент ослабления. Тогда если  $\lambda(y)$  означает плотность внутренних источников, то формула (1) соответствует известным данным в задаче рентгеновской томографии при учете поглощения и однократного рассеяния [15].

### 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Используя предыдущие обозначения и определения, рассмотрим следующую задачу о неизвестной границе.

**Задача.** Зная множество  $G$  и функцию  $[V\lambda](x, \omega)$ ,  $x \in G, \omega \in \Omega, \lambda \in M$ , найти поверхность  $\partial G_0$ .

Несмотря на то, что объектом поиска считается вся поверхность  $\partial G_0$ , фактически, определению подлежит только множество  $\partial G_0 \setminus \partial G$ , поскольку поверхность  $\partial G$  известна из постановки задачи. Заметим, что имеющееся соотношение размерности неизвестной подынте-

гральной функции и заданной информации не позволяют надеяться на определение всего подынтегрального выражения. В то же время знание поверхностей разрыва плотности представляет собой полезную информацию. Например, в задачах зондирования такие сведения весьма существенны. В частности, для рентгеновской томографии эта информация является основной. Отметим, что тематика поиска неизвестных границ довольно обширна и относится к разным областям математики. Вероятно, такой первой постановкой является известная задача Стефана.

Отметим, что для преобразования Радона случаи четных и нечетных размерностей различаются довольно значительно. В этой работе результаты для четной и нечетной размерностей также различаются и по форме, и по методам исследования.

Приведем следующие два утверждения вспомогательного характера, имеющих и самостоятельное значение как элементы качественной теории преобразований Радона.

**Лемма 1.** Если  $\lambda(y) \in M$ , то для любого вектора  $\omega \in \Omega$  преобразование Радона  $[R\lambda](\omega, p)$  непрерывно по  $p$ .

**Лемма 2.** Для  $\lambda(y) \in M$  и для функции  $F(x, y)$ , имеющей непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка по  $y_i$  справедливо равенство

$$\int_{\Omega} [V\lambda](x, \omega) d\omega = \beta_1 \int_G \frac{F(x, y) \lambda(y)}{|y - x|} dy, \beta_1 \neq 0, x \in G. \quad (2)$$

Отметим, что лемма 1 является новым результатом для преобразования Радона. Что касается леммы 2, то формула (2) приводится, например в [7], но для  $F(x, y) = 1$  и бесконечно дифференцируемой функции  $\lambda(y)$ .

Переходя к изложению основных результатов, сначала приведем утверждение о классическом преобразовании Радона.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda \in M$ ,  $n = 2m + 1$ . Тогда справедливо равенство:

$$\begin{aligned} (\Delta_x)^m \int_{\Omega} [R\lambda](x, \omega \cdot x) d\omega = \\ = (-1)^m 2(2\pi)^{2m} \lambda(x), x \notin \partial G_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Формула (3) отличается от формулы обращения в [2] только тем, что она справедлива не для всех, а для почти всех точек в  $E_n$ , что несколько

снижает ее ценность. Однако в [2] требуется принадлежность функции  $\lambda(y)$  пространству  $C^1(E_n)$ , а в нашей работе допускаются и разрывные функции. Такой результат стал возможен за счет введения нового определения псевдовыпуклого множества. Можно надеяться, что формула (3) послужит основанием для новых алгоритмов в теории зондирования, где разрывные характеристики являются естественными.

Далее будем рассматривать обобщенное преобразование Радона.

Введем дополнительные ограничения на множество функций  $F$  и образуем класс функций  $Q$ . Именно,  $F \in Q$ , если  $F(x, x) \neq 0$ ,  $x \in G$  и функция  $F(x, y)$  в  $G \times G$  имеет непрерывные и ограниченные частные производные по  $x_i$  до порядка  $n$  включительно, а по переменным  $y_i$  до первого порядка,  $i = 1, \dots, n$ . Везде далее предполагаем, что  $F \in Q$ ,  $\lambda \in M$ .

Сначала рассмотрим случай нечетного  $n$ , т.е.  $n = 2m + 1$  и определим следующую функцию

$$Ind_1(x) = (\Delta_x)^m \int_{\Omega} [V\lambda](x, \omega \cdot x) d\omega, \quad x \in G_0. \quad (4)$$

**Теорема 2.** Пусть  $n = 2m + 1$ . Тогда верно равенство

$$Ind_1(x) = \beta_2 F(x, x) \lambda(x) + \Phi(x), \quad (5)$$

$$\beta_2 \neq 0, \quad x \in G_0.$$

где  $\Phi(x)$ ,  $x \in G$ , — непрерывная и ограниченная функция.

Для  $n = 2m$  определим следующую функцию

$$Ind_2(x) = \left| \nabla_x (\Delta_x)^{m-1} \int_{\Omega} [V\lambda](x, \omega \cdot x) d\omega \right|, \quad (6)$$

$$x \in G_0.$$

**Теорема 3.** Пусть  $n = 2m$ ,  $Z \in \partial G_0 \setminus \partial G$  — контактная точка. Тогда функция  $Ind_2(x)$  ограничена на любом непустом множестве  $\{x : x \in G_0, \rho(x, \partial G_0) > \varepsilon > 0\}$ , а для точек  $x \in G_0$ ,  $x \rightarrow Z$ ,  $Ind_2(x) \rightarrow +\infty$ , если  $[\lambda(Z)]_{j,k} \neq 0$ .

Как видно из равенства (5), при  $n = 2m + 1$  функция  $Ind_1(x)$  является разрывной только в точках  $z$  поверхности  $\partial G_0 \setminus \partial G$ , если  $[\lambda(z)]_{j,k} \neq 0$ . При  $n = 2m$  из равенства (6) следует, что функция  $Ind_2(x)$  неограничена только вблизи точек  $Z$  поверхности  $\partial G_0 \setminus \partial G$  при условии, если  $[\lambda(Z)]_{j,k} \neq 0$ . Эти свойства функций  $Ind_1(x)$ ,  $Ind_2(x)$  позволяют назвать их индикаторами неоднородности, поскольку при условии ненулевого разрыва функции  $\lambda(y)$  на множестве

$\partial G_0 \setminus \partial G$ , они обеспечивают единственность решения поставленной задачи.

В заключение отметим, что простой и явный вид индикаторов  $Ind_1(x)$ ,  $Ind_2(x)$  открывает возможности построения алгоритмов решения поставленной задачи.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по программе госзадания Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, FWNF-2022-0009.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 830 с.
2. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 156 С.
3. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с.
4. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Издательство Института математики СО РАН, 2010. 912 с.
5. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный Мир, 2004. 304 с.
6. Markoe A. Analytic tomography in Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006. 315 с.
7. Намтереп Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 279 с. Naterrer F. The Mathematics of Computed Tomography. Stuttgart, and John Wiley, Ltd, 1986. P. 265.
8. Kalnin T.G., Ivonin D.A., Abrosimov K.N., Grachev E.A., Sorokina N.V. Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods // Eurasian Soil Science. 2021. V. 54. N 9. P. 1400–1409.
9. Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Ажгалиев Ш.У., Таугынбаева Г.Е. Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази-Монте-Карло // Известия вузов. Математика. 2020. № 3. С. 98–104.
10. Баев А.В. Использование преобразования Радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 4. С. 550–560.

11. *Симонов Е.Н., Прохоров А.В., Акинцева А.В.* Математическое моделирование реконструкции объемных изображений в рентгеновской компьютерной томографии с применением голографических методов // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12. № 3. С. 102–114.
12. *Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.* Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields // Numerical computations: Theory and algorithms. Part II. Sergeyev Ya. D., Kvasov D.E. (Eds.). Lecture Notes in Computer Science. 2020. V. 11974. P. 97–111.
13. *Anikonov D.S., Balakina E. Yu., Konovalova D.S.* An inverse problem for generalized Radon transformation // St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 2022. V. 15. N 1. P. 41–51. <https://doi.org/10.18721/JPM>.
14. *Anikonov D.S. and Konovalova D.S.* // A Problem of Integral Geometry for a Family of Curves with Incomplete Data // Doklady Mathematics. 2015. V. 92. N 2. P. 221–224.
15. *Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000. 223 с.

## INVERSION PROBLEM FOR RADON TRANSFORMS DEFINED ON PSEUDOCONVEX SETS

**D. S. Anikonov<sup>a, \*</sup>, D. S. Konovalova<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.G. Romanov

This paper is devoted to some questions of inversion for the classical and generalized integral Radon transform. The main question is to determine information about the integrand functions if the values of some integrals are known. A feature of the work of the authors of this message is an analysis of the case when the function is integrated according to hyperplanes in finite-dimensional Euclidean space, and the integrands depend not only on the variables of integration, but also on some of the variables characterizing the hyperplanes. At the same time, the number of independent variables describing known integrals are smaller than those of the unknown integrand. We consider discontinuous integrands defined specifically introduced pseudo-convex sets. A Stefan-type problem is posed about finding surfaces discontinuities of the integrand function. The work provides formulas based on the application special integro-differential operators to known data and allowing you to solve the assigned tasks.

*Keywords:* generalized Radon transform, integral geometry, probing, tomography, differential equation, discontinuous functions

УДК 517.957,517.984

## МУЛЬТИ-ВИХРИ И ОЦЕНКИ СНИЗУ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

© 2024 г. А. Г. Костянко<sup>1,4,\*</sup>, А. А. Ильин<sup>3,4,\*\*</sup>, Д. Стоун<sup>2,\*\*\*</sup>, С. В. Зелик<sup>1,2,3,4,\*\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным

Поступило 23.02.2024 г.

После доработки 26.03.2024 г.

Принято к публикации 26.03.2024 г.

Представлен новый метод получения оценок снизу размерности аттракторов для уравнений Навье–Стокса, который не использует течения Колмогорова. При помощи этого метода получены точные оценки размерности для случая уравнений на плоскости с экмановским трением. Подобные оценки были известны ранее только для случая периодических граничных условий. Кроме того, получены аналогичные оценки снизу для классической системы Навье–Стокса в двумерной ограниченной области с условиями Дирихле.

*Ключевые слова:* уравнения Навье–Стокса, аттракторы, размерность, неустойчивые вихри

DOI: 10.31857/S2686954324020163, EDN: XHPUVQ

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе рассматривается двумерная система уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u, \nabla)u + \nabla p + \mu u &= \nu \Delta u + g, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u$  и  $p$  – неизвестные поля скоростей и давления соответственно,  $\nu > 0$  – кинематическая вязкость,  $\mu \geq 0$  – коэффициент, характеризующий экмановское трение (которое играет важную роль в моделях геофизической гидродинамики),  $g$  – заданное поле внешних сил. Мы будем рассматривать три случая. Случай 1:

задача (1) в ограниченной области  $\Omega$  с гладкой границей. Фазовое пространство  $\mathcal{H}$  в этом случае совпадает с подпространством  $L^2(\Omega)$ , состоящим из бездивергентных векторных полей, нормальная компонента которых на границе равна нулю. Случай 2: периодические граничные условия. Здесь  $\mathcal{H}$  – подпространство  $L^2((-\pi, \pi)^2)$ , состоящее из бездивергентных векторных полей с нулевым средним. В этом случае для диссипативности задачи также требуется, чтобы внешние силы обладали нулевым средним. Случай 3: задача (1) на всей плоскости  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . В этом случае  $\mathcal{H}$  совпадает с подпространством  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , состоящим из бездивергентных векторных полей, а для диссипативности задачи нужно предположить, что  $\mu > 0$ .

Известно, что, во всех трёх случаях, задача (1) с условием  $g \in L^2(\Omega)$  корректно поставлена в фазовом пространстве  $\mathcal{H}$ , порождает в нём диссипативную полугруппу, которая обладает в нём глобальным аттрактором  $\mathcal{A}$  конечной фрактальной размерности, см. [1, 2, 3, 4] и цитированную там литературу.

Напомним также, что конечномерность динамики, порождаемой системой (1) на аттракторе (то есть возможность её эффективного описания при помощи конечного числа параметров) является одним из ключевых предсказаний теории

<sup>1</sup> Zhejiang Normal University, Department of Mathematics, Zhejiang, China

<sup>2</sup> University of Surrey, Department of Mathematics, Guildford, UK

<sup>3</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

<sup>4</sup> НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия

\* E-mail: a.kostianko@imperial.ac.uk

\*\* E-mail: ilyin@keldysh.ru

\*\*\* E-mail: d.stone@surrey.ac.uk

\*\*\*\* E-mail: s.zelik@surrey.ac.uk

турбулентности А. Н. Колмогорова, а фрактальная размерность аттрактора часто интерпретируется как математически строгое определение для числа степеней свободы редуцированной конечномерной динамики. Это объясняет важность получения разумных оценок этой размерности сверху и снизу, а также постоянный интерес научного сообщества к данной проблеме на протяжении последних 50-ти лет, см. [1, 2, 5] и цитируемую там литературу.

Наиболее изучен случай уравнений (1) на торе  $\Omega = (-\pi, \pi)^2$ , в котором получены логарифмически точные двусторонние оценки размерности аттрактора, которые согласуются с предсказаниями теории Колмогорова. А именно, в случае  $\mu = 0$ , справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) &\leq CG^{2/3} \ln(1 + G)^{1/3}, \\ \dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) &\geq cG^{2/3}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $G := \frac{|\Omega| \|g\|_{L^2}}{\nu^2}$  – так называемое число

Грасгофа, а  $C$  и  $c$  – некоторые абсолютные константы. Как обычно, оценка сверху верна для всех возможных выборов  $\nu > 0$  и  $g \in \mathcal{H}$ , а соответствующая оценка снизу справедлива только для некоторых специально построенных внешних сил  $g$ , см. [6]. В случае ненулевого экмановского трения, безразмерным аналогом числа

Грасгофа является величина  $G_1 := \frac{\|\operatorname{curl} g\|_{L^2}^2}{\mu^3 \nu}$ , а

соответствующие оценки размерности приобретают следующий вид:

$$\dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) \leq C_1 G_1, \quad \dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) \geq c_1 G_1, \quad (3)$$

где  $C_1$  и  $c_1$  – некоторые новые абсолютные константы, см. [3].

В непериодическом случае размерность аттрактора изучена гораздо хуже. Так, в случае всей плоскости  $\Omega = \mathbb{R}^2$  и ненулевого экмановского трения, справедлива такая же оценка (3) сверху, как и для тора (см. [4]), однако, никаких разумных оценок снизу известно не было.

Также заметим, что в наиболее же физически важном случае ограниченной области с условиями Дирихле для стандартной системы Навье–Стокса (т.е. с  $\mu = 0$ ) известна лишь оценка сверху [2]

$$\dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) \leq C_0 G, \quad (4)$$

которая, видимо, является слишком грубой, хотя на сегодняшний день здесь также не было известно ни одной оценки снизу.

Основная проблема с оценками снизу заключается в сложности нахождения положений равновесия системы Навье–Стокса с большим индексом неустойчивости (даже если разрешено произвольно менять правую часть). Фактически все известные оценки снизу размерности аттракторов в гидродинамике базируются на результатах фундаментальной работы [7] об оценках индекса неустойчивости течений Колмогорова и различных их обобщений. Так как аналоги течений Колмогорова в непериодическом случае не были известны, то и соответствующая техника оценок снизу также не была разработана.

В настоящей работе представлена новая универсальная схема построения таких положений равновесия, которая не использует течения Колмогорова, а базируется на сложении большого числа неустойчивых локализованных вихрей, расположенных на достаточно большом расстоянии друг от друга. В этом случае естественно ожидать (и можно доказать), что индекс неустойчивости такого мульти-вихря равен сумме индексов неустойчивости вихрей, участвовавших в его построении, что и даёт желаемое положение равновесия с большим индексом неустойчивости (если известно существование хотя бы одного неустойчивого вихря). Преимущество этого метода заключается в его нечувствительности к геометрии области и выбору граничных условий: он работает схожим образом как на торе (где воспроизводит известные результаты), так и в случае ограниченной области или всей плоскости, где позволяет получать существенно новые результаты. Отметим также его применимость к другим классам уравнений гидродинамики, включая трёхмерный случай, который будет рассмотрен в последующих работах.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** *В случае ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с гладкой границей и отсутствием экмановского трения ( $\mu = 0$ ) (т.е. для классической двумерной системы Навье–Стокса) существует семейство  $g = g_\nu$  гладких правых частей уравнения (1), зависящее от параметра  $0 < \nu \ll 1$ , такое*

что фрактальная размерность соответствующего аттрактора допускает оценку

$$\dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) \geq c_0 G^{2/3} \quad (5)$$

для некоторой абсолютной константы  $c_0$ . Аналогично, в случае  $\Omega = \mathbb{R}^2$  и наличия экмановского трения, существует двухпараметрическое семейство гладких правых частей  $g = g_{\nu, \mu}$ ,  $0 < \nu, \mu \leq 1$ ,  $\nu \ll \mu$ , таких что фрактальная размерность аттрактора допускает оценку

$$\dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) \geq c'_0 G_1 \quad (6)$$

для некоторой абсолютной константы  $c'_0$ .

Таким образом, в случае  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , данный результат подтверждает точность оценки сверху аттрактора, полученную ранее в работе [4]. В случае же уравнения в ограниченной области, всё ещё имеется существенный зазор между классической оценкой сверху (4) и новой оценкой снизу (5), которая формально совпадает с известной ранее оценкой снизу для тора.

## 2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Заметим прежде всего, что оба числа  $G$  и  $G_1$  являются безразмерными и потому не меняются при перенормировках зависимых и независимых переменных. Так как такими перенормировками можно свести общий случай без экмановского трения, к частному случаю  $\nu = 1$ , а случай ненулевого  $\mu > 0$  к частному случаю  $\mu = \nu = 1$ , то достаточно построить семейства правых частей для этих двух частных случаев. При такой перенормировке изначальная область  $\Omega$  переходит в  $\Omega_L = L\Omega$ , где  $L = L(\nu, \mu)$  большой параметр, который стремится к бесконечности, когда  $\mu, \nu \rightarrow 0$  (в первом случае  $L = \nu^{-1/2}$ , а во втором  $L = \mu^{1/2} / \nu^{1/2}$ , что и приводит к дополнительному условию  $\nu \ll \mu$ , присутствующему также в работе [3]). Таким образом задача сводится к случаю *большой* области  $\Omega_L$  (со значениями параметров либо  $\nu = 1$ ,  $\mu = 0$ , либо  $\mu = \nu = 1$ ). При этом мы будем выражать размерность аттрактора, а также значения величин  $G$  или  $G_1$  в терминах большого параметра  $L$ , что и даст нам необходимые оценки снизу.

Далее, так как аттрактор всегда содержит неустойчивые многообразия положений равновесия, а размерность такого многообразия равна его индексу неустойчивости (то есть числу собственных значений с положительной веществен-

ной частью генератора линеаризованной на этом положении равновесия системы), то задача линеаризуется и сводится к нахождению гладкого положения равновесия  $U = U(x) \in \mathcal{H}$  уравнения (1) такого, чтобы линейная спектральная задача

$$(U, \nabla)v + (\nu, \nabla)U + \nabla p - \nu \Delta v = (\lambda - \mu)v, \operatorname{div} v = 0 \quad (7)$$

имела бы как можно больше решений, соответствующим значениям спектрального параметра с положительной вещественной частью, см., например, [1, 2]. Нетрудно показать также, что во всех рассматриваемых случаях, положительная часть спектра состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Более того, с этого момента достаточно ограничиться случаем  $\nu = 1$ ,  $\mu = 0$  и поставить дополнительное условие  $\operatorname{Re} \lambda > 1$ .

Ключевым для дальнейшего является существование гладкого локализованного поля скоростей  $U_0(x)$ , для которого спектральная задача (7) на всей плоскости  $\Omega = \mathbb{R}^2$  имеет хотя бы одно нетривиальное решение  $v_0(x)$  с  $\nu = 1$  и  $\mu = 0$  при некотором  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  с  $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$ . Такое решение было недавно построено в работах М. М. Вишика [8], см. также [9]. Более того, это поле скоростей было найдено в виде полностью локализованного радиально симметричного вихря:  $U_0(x) = \nabla^\perp \Psi_0(|x|)$ , где  $\Psi_0 \in C_0^\infty([0, \infty))$  — соответствующая функция тока. По заданному полю скоростей  $U_0$  мы затем строим правую часть  $g_0$  так, чтобы поле  $U_0$  являлось положением равновесия для системы (1) с правой частью  $g_0$ . Учитывая тот факт, что нелинейность  $(U_0, \nabla)U_0$  является градиентной, мы можем фиксировать  $g_0 \in \mathcal{H}$  по формуле

$$g_0 = \mu U_0 - \nu \Delta U_0.$$

Важно, что  $g_0$  остаётся гладкой и полностью локализованной по  $x$ .

Ключевой идеей нашего метода является построение мульти-вихря  $U$  из модельного вихря  $U_0$ . Для этого мы фиксируем набор  $\Xi := \{\xi_k\}_{k=1}^N$ ,  $\xi_k \in \Omega_{L/2}$  координат центров элементарных вихрей  $U_{\xi_k}(x) := U_0(x - \xi_k)$ . Предполагается, что эти вихри расположены достаточно далеко друг от друга:

$$|\xi_i - \xi_j| \geq M_0, \quad i \neq j,$$

где  $M_0$  достаточно большое фиксированное число, которое не зависит от  $L \gg 1$ . Более того,

расстояние от каждого такого вихря до границы  $\partial\Omega_L$  не меньше  $L/2 \gg 1$ , что делает влияние границы и граничных условий несущественными. Отметим, что максимальное число  $N$  точек в такой системе пропорционально  $(L/M_0)^2$ . Рассмотрим мульти-вихрь

$$U(x) = U_{\Xi}(x) := \sum_{k=1}^N U_{\xi_k}(x), \quad (8)$$

который является положением равновесия системы (1) с правой частью

$$g(x) = g_{\Xi}(x) := \sum_{k=1}^N g_{\xi_k}(x), \quad g_{\xi_k}(x) := g_0(x - \xi_k) \quad (9)$$

и спектральную задачу (7), соответствующую мульти-вихрю  $U_{\Xi}$ . Пусть  $v_0$  – собственная функция этой задачи с модельным вихрем  $U_0$  и собственным значением  $\lambda_0$ ,  $\text{Re}\lambda_0 > 1$ , а  $v_{\xi_k}(x) := v_0(x - \xi_k)$  её пространственные сдвиги. Тогда можно показать, что при достаточно больших  $L$  и  $M_0$  функции

$$\sum_{k=1}^N a_k v_{\xi_k}, \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (10)$$

являются собственными функциями мульти-вихря  $U_{\Xi}$  с точностью до малых поправок. Напомним, что, в отличие от  $U_0$ , собственная функция  $v_0$  не является полностью локализованной (хоть и убывают при  $|x| \rightarrow \infty$  как  $|x|^{-3}$ ), потому  $v_{\xi_k}$  с разными  $k$  все таки слабо взаимодействуют друг с другом, что и приводит к появлению малых поправок. В случае ограниченной области, собственные функции  $v_{\xi_k}$  не удовлетворяют, вообще говоря, граничным условиям, что приводит к появлению малых поправок другого типа, которые также нужно контролировать.

Применяя методы теории возмущения для мульти-солитонных структур, разработанные в [10], к данной спектральной задаче, мы доказали, что почти собственные функции (10), порождают как минимум  $N$  точных собственных функций, отвечающим собственным значениям  $\lambda_k$ , которые близки к  $\lambda_0$ , если параметры  $M_0$  и  $L$  достаточно велики. В свою очередь, это означает, что индекс неустойчивости рассматриваемого мульти-вихря не меньше  $N$ , что приводит к искомой оценке

$$\dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) \geq N \sim (L/M_0)^2 = cL^2. \quad (11)$$

Строгое доказательство существования упомянутых выше точных собственных функций для мульти-вихря весьма нетривиально и достаточ-

но сложно технически, поэтому будет изложено в другой статье. Основная трудность этого доказательства связана с тем, что в отличие от общего случая, разобранный в [10], в нашем случае имеется дополнительная и весьма сильная нелокальная связь между функциями  $v_{\xi_k}$  с разными  $k$ , обусловленная наличием давления, которая не позволяет автоматически использовать результаты [10] и требует существенных дополнительных усилий.

После получения оценки (11) уже несложно завершить доказательство основной теоремы. Действительно, так как правая часть  $g_0$  полностью локализованная функция, то для перенормированной задачи в области  $\Omega_L$ :

$$\|g_{\Xi}\|_{L^2} \sim \|\text{curl}g_{\Xi}\|_{L^2} \sim L, \quad |\Omega_L| \sim L^2, \quad G \sim L^3, \quad G_1 \sim L^2, \quad (12)$$

что вместе с (11) даёт

$$\dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) \sim G^{2/3} \text{ или } \dim_f(\mathcal{A}, \mathcal{H}) \sim G_1$$

и завершает доказательство теоремы.

Отметим в заключение, что ни радиальная симметричность модельного решения  $U_0$ , ни его полная локализация в пространстве не являются существенными для предложенного метода. Для его применимости необходимо найти лишь одно экспоненциально неустойчивое положение равновесия, достаточно быстро убывающее при  $|x| \rightarrow \infty$ .

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ (проект № 23-71-30008).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабин А.В., Вушик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
2. *Temam R.* Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997.
3. *Ilyin A.A., Miranville A., Titi E.S.* Small viscosity sharp estimates for the global attractor of the 2-D damped/driven Navier–Stokes equations // Commun. Math. Sci. 2004. V. 2. P. 403–426.
4. *Ilyin A.A., Patni K., Zelik S.V.* Upper bounds for the attractor dimension of damped Navier–Stokes equations in  $\mathbb{R}^2$  // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2016 V. 36. N 4. P. 2085–2102.
5. *Zelik S.V.* Attractors. Then and Now // Успехи математических наук. 2023. V. 78. N 4. P. 53–198.

6. *Liu V.X.* A sharp lower bound for the Hausdorff dimension of the global attractors of the 2D Navier–Stokes equations // *Comm. Math. Phys.* 1993. V. 158. P. 327–339.
7. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // *Прикладная мат. мех.* 1961. Т. 25. С. 1140–1143.
8. *Vishik M.M.* Instability and non-uniqueness in the Cauchy problem for the Euler equations of an ideal incompressible fluid. Part I arXiv:1805.09426 and Part 2 arXiv:1805.09440, 2018.
9. *Albritton D., Brué E., Colombo M.* Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier–Stokes equations // *Ann. Math. (2)* 2022. V. 196. N 1. P. 415–455.
10. *Mielke A., Zelik S.V.* Multi-Pulse Evolution and Space-Time Chaos in Dissipative Systems // *Mem. Amer. Math. Soc.* 2009. V. 198. N 925. 97 p.

## MULTI-VORTICES AND LOWER BOUNDS FOR THE ATTRACTOR DIMENSION OF 2D NAVIER-STOKES EQUATIONS

A. Kostianko<sup>a, d, \*</sup>, A. Ilyin<sup>c, d, \*\*</sup>, D. Stone<sup>b, \*\*\*</sup>, S. Zelik<sup>a, b, c, d, \*\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>*Zhejiang Normal University, Department of Mathematics, Zhejiang, China*

<sup>b</sup>*University of Surrey, Department of Mathematics, Guildford, UK*

<sup>c</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>d</sup>*HSE University, Nizhny Novgorod, Russia*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

A new method for obtaining lower bounds for the dimension of attractors for the Navier–Stokes equations, which does not use Kolmogorov flows, is presented. Using this method, exact estimates of the dimension are obtained for the case of equations on a plane with Ekman damping. Similar estimates were previously known only for the case of periodic boundary conditions. In addition, similar lower bounds are obtained for the classical Navier–Stokes system in a two-dimensional bounded domain with Dirichlet boundary conditions.

*Keywords:* Navier–Stokes equation, attractors, dimension, unstable vortices

УДК 004.74

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ С МАШИНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ СЕТЕВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ИНФРАСТРУКТУРОЙ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН Р. Л. Смелянский<sup>1,\*</sup>, Е. П. Степанов<sup>1,\*\*</sup>

Поступило 14.11.2023 г.  
После доработки 20.03.2024 г.  
Принято к публикации 26.03.2024 г.

В статье рассмотрено применение методов машинного обучения для оптимального управления ресурсами сетевой вычислительной инфраструктурой – вычислительной инфраструктурой нового поколения. Рассмотрена связь между предлагаемой вычислительной инфраструктурой и концепцией GRID. Показано, как методы машинного обучения в управлении сетевой вычислительной инфраструктурой позволяют решить проблемы управления вычислительной инфраструктурой, которые не позволили реализовать концепцию GRID в полной мере. В качестве примера рассмотрено применение метода многоагентной оптимизации в комбинации с методом машинного обучения с подкреплением для управления сетевыми ресурсами. Показано, что использование многоагентных методов машинного обучения позволяет повысить скорость распределения транспортных потоков и обеспечить оптимальную загрузку сетевых каналов вычислительной инфраструктуры по критерию равномерности распределения нагрузки и что такое управление сетевыми ресурсами эффективнее централизованного подхода.

*Ключевые слова:* методы обучения с подкреплением, многоагентные методы, сетевая вычислительная инфраструктура

DOI: 10.31857/S2686954324020176, EDN: XHPDZH

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Организация вычислений – одна из основ современной цивилизации. Ее эффективность зависит от устройства вычислительной инфраструктуры. Поэтому важно понимать основные тенденции и направление ее развития, основной движущей силой которой являются требования приложений пользователей. Под термином *Вычислительная инфраструктура* далее будем понимать комплекс локальных вычислительных установок (центров обработки данных, высокопроизводительных вычислителей, серверных кластеров), связанных сетью передачи данных, у которого есть самостоятельные распределенные контуры динамического управления/распределения вычислительной нагрузкой и динамического управления потоками данных между компонентами комплекса. Вычислительная ин-

фраструктура должна обладать всеми свойствами открытых систем и позволять неограниченно подключать к существующему комплексу вычислительных установок новые локации без остановок или нарушения функционирования существующего комплекса. Она должна отвечать всем требованиям безопасной обработки, передачи и хранения данных. Обеспечивать бесперебойный обмен данными как внутри существующего комплекса, так и с подключаемыми внешними компонентами в соответствии с требованиями приложений. Взаимодействующие компоненты такой вычислительной инфраструктуры должны позволять их модернизацию без остановки ее функционирования.

В [1] представлен анализ широкого спектра приложений из различных прикладных областей таких, как умный город, умный дом, здравоохранение (особенно такие направления как телемедицина, хирургия), транспорт, сельское хозяйство, научные междисциплинарные исследования. Отмечено, что все современные приложения чувствительны к времени отклика. Расстояние между точками обработки, хранения данных и получения результатов вычислений влияет на задержку транспортировки данных,

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра Автоматизации систем вычислительных комплексов, Москва, Россия

\* E-mail: smel@cs.msu.su

\*\* E-mail: estepanov@lvk.cs.msu.ru

и неправильный выбор локальной вычислительной установки может нарушить требования приложения и даже заблокировать его работу. Это означает, что допустимое расстояние между местом обработки данных (приложением или его компонентами) и их источником ограничено. Еще один важный вывод, который был сделан в результате этого анализа, состоял в том, что привязка приложений или их компонентов к определенным географическим местам неэффективна. Неэффективность проявляется, во-первых, в том, что ограничиваются мобильность как источника данных, так и потребителя результата вычислений. Во-вторых, время нахождения запроса на вычисления в вычислительной инфраструктуре (далее время заявки в системе), т.е. сумма времен на передачу данных к месту обработки, нахождение заявки на обработку данных в очереди, обработка данных (вычисления), передачу промежуточных результатов между компонентами приложения, которые могут выполняться в разных местах, и время на доставку результата, может оказаться больше, чем время нахождения этой же заявки в системе, если бы вычислительная инфраструктура могла динамически в ходе работы сама выбирать, где будет происходить обработка тех или иных данных. Этот вывод подтверждают результаты исследования [2]. Из практики хорошо известно, что в очереди к суперкомпьютеру задача может простоять несколько дней. В то же время эта же задача могла бы быть выполнена в облачной среде близлежащего центра обработки данных. Время выполнения в облачной среде наверняка будет больше, чем время выполнения в среде суперкомпьютера, но по критерию время нахождения заявки в очереди облачная среда может оказаться эффективнее. Сказанное позволяет говорить о том, что управлять распределением приложений в вычислительной инфраструктуре, потоками данных должна вычислительная инфраструктура, а не пользователь.

Как уже было отмечено, основной движущей силой развития инфраструктуры для вычислений, ее операционной среды, языков программирования и инструментов всегда были потребности приложений. Именно потребности приложений, а не возможности аппаратных средств, инженерии программирования, базового программного обеспечения. Набор свойств современных приложений [3] включает в себя: распределенность, самодостаточность, режим реального времени, эластичность, кроссплатформенность и другие. Описания этих терминов

можно найти в [3]. Для облегчения понимания дальнейшего поясним термин самодостаточность, который определен в [3] как: “приложение уже не представляется только кодом и исходными данными, оно сопровождается описанием структуры приложения, взаимосвязи его компонентов (далее сервисов приложений), заданием требуемого уровня их производительности/времени реакции, явно сформулированными требованиями к вычислительным и сетевым ресурсам, ресурсам хранения данных и доступу к ним, предполагаемых временных ограничений на время вычислений и передачу данных в виде соглашения об уровне обслуживания (Service Level Agreement – далее SLA), процедуры запуска приложений. Для таких описаний сейчас активно развиваются специальные языки. Ярким примером прообраза такого языка может служить язык TOSCA [4] (далее такое описание будет называться Спецификацией Функционирования Приложения (Application Operation Specification – AOS))”.

Приложение со свойствами, сформулированным выше, предъявляет следующие требования к вычислительной инфраструктуре [3]: детерминированность поведения, безопасность, доступность, надежность и отказоустойчивость, эффективность и справедливость при распределении ресурсов, повсеместная виртуализация всех видов ресурсов, масштабируемость, бессерверность. Детерминированность поведения – это возможность заранее прогнозировать количественные параметры функционирования такие, как время исполнения, задержка на передачу данных. Бессерверная технология в [3] трактовалась, следуя [5], следующим образом: “инфраструктура должна автоматически размещать компоненты приложения таким образом, чтобы они могли взаимодействовать в соответствии с требованиями SLA приложения и так, чтобы гарантировать экономное использование ресурсов инфраструктуры”.

Чтобы вычислительная инфраструктура могла соответствовать требованиям эффективности и детерминированности и служить вычислительной инфраструктурой для приложений в вышесказанном смысле, ее функционирование должно соответствовать таким требованиям, как: “

- предсказуемость времени выполнения компонентов приложения и времени их взаимодействия (передачи данных) согласно AOS;
- наличие методов оценки времени выполнения компонентов приложения, инвариантных

к архитектуре вычислителей, входящих в состав сетевой вычислительной инфраструктуры;

- детерминированность характеристик передачи данных между компонентами приложения по оверлейным каналам (далее Quality of Service – QoS канала);

- надежная изоляция контура управления и контура передачи данных (далее просто контура данных) в сети передачи данных (СПД) вычислительной инфраструктуры от ошибок в сетевом оборудовании, а также изоляция потоков данных от вредоносных воздействий на этих контурах”. [3]

Для обеспечения детерминированности параметров передачи данных между компонентами приложения необходимо: “

- устанавливать и гарантировать диапазоны изменения сквозной задержки и джиттера в СПД;

- гарантировать вероятность потери пакетов в СПД на уровне, соответствующем SLA приложения;

- сделать оперативно управляемым использование доступной пропускной способности каналов СПД;

- исключить непредсказуемые задержки при передаче данных, вызванные задержкой пакетов из-за отказа в соединении, повторной передачи, обратной связи по перегрузке, использования широкоэвентальной рассылки и т.д.” [3]

Вычислительную инфраструктуру, удовлетворяющую перечисленным выше требованиям, мы будем называть *сетевой вычислительной инфраструктурой* (Network Powered by Computing, далее NPC).

Рассматривая ретроспективу развития вычислительной инфраструктуры следует признать, что концепция GRID вычислительной инфраструктуры, предложенной Яном Фостером и Карлом Кессельманом в 1999 году [6], наиболее соответствует сформулированным выше требованиям. Вот как сами авторы определяют основные свойства GRID инфраструктуры (цитируется по [7]):

1. “Координирует ресурсы, которые не подлежат централизованному контролю... (Grid объединяет и координирует ресурсы и пользователей, которые живут в разных доменах управления – например, рабочий стол пользователя или центральный компьютер; разные административные подразделения одной и той же компании; или разных компаний; и решает вопросы

безопасности, политики, оплаты, членства и т.д., которые возникают в этих условиях. В противном случае мы имеем дело с локальной системой управления.)

2. Использует стандартные, открытые протоколы и интерфейсы общего назначения... (GRID построен из многоцелевых протоколов и интерфейсов, которые решают такие фундаментальные проблемы, как аутентификация, авторизация, обнаружение ресурсов и доступ к ресурсам. ... [Это] важно, чтобы эти протоколы и интерфейсы были стандартными и открытыми. В противном случае мы имеем дело с системой, специфичной для приложения.)

3. Предоставляет нетривиальные качества обслуживания. (GRID позволяет скоординированно использовать составляющие его ресурсы для предоставления услуг различного качества, касающихся, например, времени отклика, пропускной способности, доступности и безопасности и/или совместного размещения нескольких типов ресурсов для удовлетворения сложных требований пользователей, поэтому полезность объединенной системы значительно больше, чем полезность суммы ее частей”.

Однако, по мнению авторов статьи [7], ни одна из многочисленных попыток реализовать концепцию GRID до сих пор не увенчалась успехом. Ни одна из перечисленных в этой работе инфраструктур не удовлетворила сформулированные выше требования, не позволила автоматически минимизировать время выполнения приложения в вычислительной инфраструктуре с учетом его временных ограничений за счет эффективного автоматического управления распределением вычислительной нагрузки между доступными вычислителями, “нетривиального качества обслуживания”, эффективного управления передачей данных между компонентами приложения, возможности неограниченного наращивания вычислительных ресурсов по требованию [7].

Связано это с тем, что производительность вычислительной техники, доступная скорость передачи данных и доступные математические методы управления ресурсами вычислительной инфраструктуры в начале 2000-х были недостаточны для достижения этих свойств. Однако, согласно [8], производительность серверов с 2014 по 2024 возросла примерно в 7 раз, производительность супервычислителей выросла на 4 порядка [9], а максимальная скорость передачи данных за этот же период возросла с нескольких Tbps до 1.1 Pbps [10].

Эти достижения стимулировали прорыв в математических методах оптимизации на основе машинного обучения. Дело в том, что, принимая во внимание отмеченные выше скорости вычислений и передачи данных и то, что сетевые сервисы и компоненты приложений легко масштабируются и работают в режиме реального времени, в NPC для оптимизации управления ресурсами, потоками данных и вычислениями требуются алгоритмы с низкой временной сложностью, т.к. временные задержки на принятие решений становятся критическими для эффективного функционирования инфраструктуры. Классические методы оптимизации [11] для этого не подходят, т.к. предполагают централизованное принятие решения, когда проводится централизованно комбинаторный поиск вариантов решения по чётко определенному (детерминированному) алгоритму, позволяющему найти наилучшее решение проблемы. Такой подход кроме вычислительной сложности требует больших накладных расходов на сбор, обработку и передачу данных между компонентами вычислительной инфраструктуры. В этих условиях предпочтительнее становятся методы распределенной, мультиагентной оптимизации (MAO). В мультиагентных методах решение задачи получается в ходе самоорганизации распределенного множества алгоритмов-агентов, способных к конкуренции и/или к кооперации, и имеющих собственные критерии, предпочтения и ограничения. Решение считается найденным, когда в ходе своих недетерминированных взаимодействий агенты достигают неуплощаемого консенсуса (временного равновесия или баланса интересов), который и принимается за решение задачи.

Развитие методов MAO существенно стимулировали достижения за указанный период времени в области математических методов распределенной оптимизации, позволяющие сократить число обменов и объем передаваемых данных при распределенной оптимизации в отдельных случаях до 240 раз, а в среднем — до 4–5 раз [12, 13].

Идея тензорного поезда [14] в случае  $d$ -мерных массивов, обладающих специальной структурой, позволила снизить требования к объему памяти для их хранения с экспоненциальных, т.е.  $O(N^d)$  ячеек памяти, до почти линейных, т.е.  $O(d * N * r^2)$ , где  $r$  — максимальный из рангов тензорного поезда. При этом вычислительная сложность построения функционально-порожденных тензоров тензорного поезда всего

лишь за  $O(d * N * r^3)$  вычислений их элементов. Идеи тензорных разложений нашли ряд применений в задачах со сжатием нейросетевых моделей, где позволили сократить требования к памяти в десятки раз без существенных потерь в качестве их работы [15, 16]. В настоящее время за рубежом появляется интерес к пробным реализациям данных алгоритмов на реальных чипах [17], призванных решать задачи искусственного интеллекта.

Методы машинного обучения, идеи тензорных разложений нашли применение в задачах, связанных с методами оценки ожидаемого времени выполнения программ, инвариантных к особенностям архитектуры вычислителя [3]. Задача предсказания состоит в том, чтобы спрогнозировать ожидаемое время работы программы на вычислителе, на котором эта программа с определенным набором параметров до этого не выполнялась. Эти методы можно использовать для задач оптимального распределения компонентов приложения между вычислительными узлами, оптимального распределения потоков данных между наложенными каналами.

Ниже мы кратко рассмотрим основные положения архитектуры новой вычислительной инфраструктуры NPC и методы управления ею. В этой статье в качестве примера применения математических методов распределенного машинного обучения мы рассмотрим задачу управления потоками передаваемых данных (далее сетевым трафиком) в NPC, суть которой состоит в распределении трафика по каналам сети передачи данных так, чтобы не вызывать перегрузки и минимизировать задержки при передаче. Главной причиной выбора этой задачи в качестве примера является то, что её решение есть комбинация метода распределенной мультиагентной оптимизации и методов машинного обучения с подкреплением. Такая комбинация позволяет принимать решения по управлению быстрее по сравнению с централизованным подходом за счет распределенности агентов и подстраиваться в динамике под состояние сетевой вычислительной инфраструктуры за счет обучения с подкреплением.

## 2. СЕТЕВАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ИНФРАСТРУКТУРА

Функциональная архитектура NPC (рис. 4) была представлена в [3]. Основу построения NPC составляют технологии программно-кон-

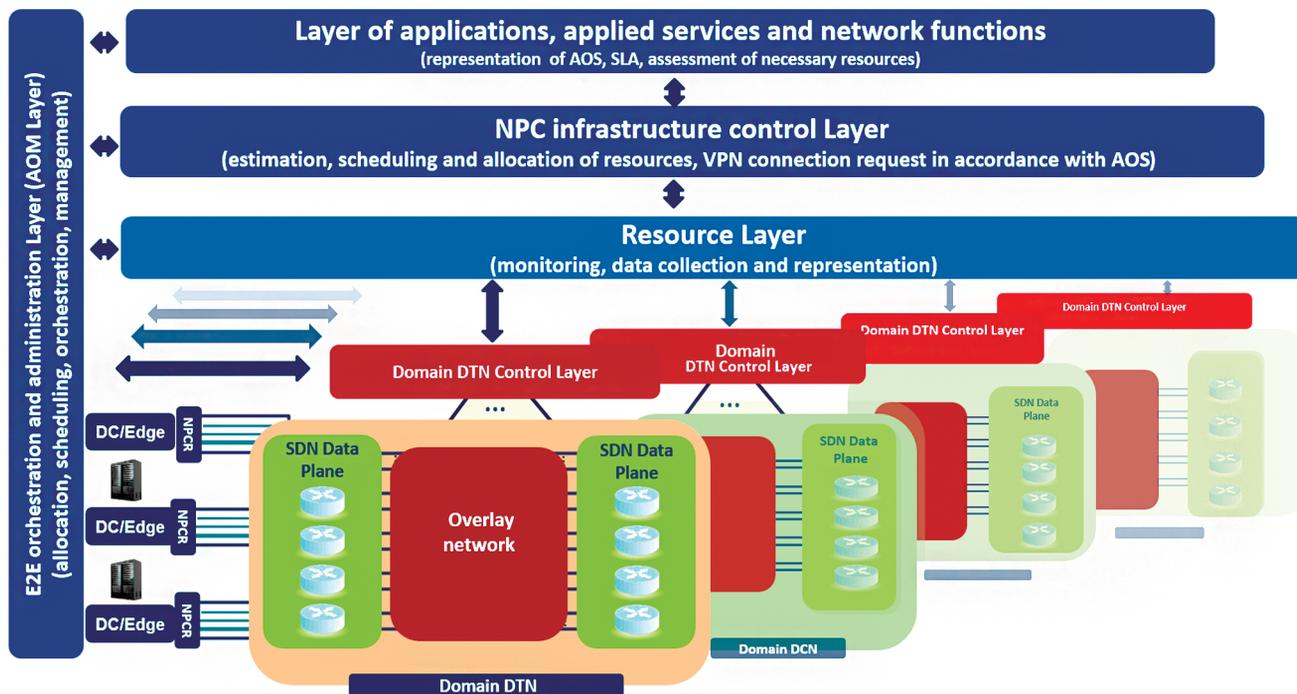


Рис. 1. Функциональная архитектура NPC.

фигурируемых сетей (SDN) и виртуализации сетевых функций (NFV) [18]. Кратко опишем ее организацию, основанную на федеративном принципе [6]. В ведении каждого федерата находится определенное количество вычислительных ресурсов, телекоммуникационных ресурсов и ресурсов хранения данных. Управление перечисленными ресурсами в NPC организовано в виде нескольких контуров: контур приложения, сервисов приложений и сетевых функций (ASNF), контур управления инфраструктурой NPC (NPCIC), контур вычислительных, сетевых ресурсов и ресурсов хранения данных (NPCRL), контур оркестрации, администрирования и управления (OAM).

Контур ASNF является распределенным и отвечает за представление приложения: его код и его данные, спецификацию работы приложения (AOS), представление сервисов приложения и виртуализированных сетевых функций VNF, необходимых для работы приложения, спецификацию сети передачи данных между компонентами приложения. Спецификация сети должна включать топологию сети передачи данных между компонентами приложения, требования к качеству обслуживания каналов (QoS), которые должны включать такие характеристики, как доступная пропускная способность, допустимая задержка, допустимая вероятность потери паке-

тов, допустимый диапазон изменения джиттера. На основе этой информации и SLA для приложения в целом контур ASNF рассчитывает SLA для каждого сервиса приложения, входящего в его AOS спецификацию.

Контур NPCIC также является распределенным. Его компоненты, координируя свои действия, обеспечивают планирование и назначение компонентам приложения ресурсов NPC в соответствии с AOS спецификацией и прогнозируемым временем для вычислений и передачи данных, соблюдая требования приложения SLA на основе текущего состояния ресурсов. Для обеспечения взаимодействия компонентов приложения контур NPCIC создает и поддерживает наложенную сеть между надлежащими вычислительными локациями в NPC, где были размещены компоненты приложения в соответствии с AOS спецификацией. Именно в этом контуре определяется, какие VNF потребуются и где в сети передачи данных.

Контур NPCRL отвечает за унифицированное представление состояния разнородных ресурсов NPC и мониторинг их текущего состояния, и прогнозирование их состояния на ближайшее время. Прогнозирование является краеугольным камнем, позволяющим сделать поведение NPC предсказуемым.

Контур ОАМ организует согласованное взаимодействие компонентов приложения в соответствии с AOS, собирает данные о потреблении ресурсов для каждого компонента приложения, обеспечивает управление безопасностью и администрирование NPC.

В представленной архитектуре есть важный для дальнейшего изложения компонент — устройство, ответственное за объединение ресурсов обработки данных, сети передачи данных и внешних источников запросов на вычислительные услуги. Назовем такое устройство NPC маршрутизатором (NPCR, изображен на рис. 4 справа от DC/Edge). NPCR доступно несколько наложенных каналов — каналов, состоящих из физических линий передачи данных, возможно, разной природы: коаксиал, витая пара, оптическая линия, радиоканал. Из-за разной природы наложенные каналы предоставляют разное качество сервиса, поэтому лишь некоторые из них могут быть использованы для передачи данных до определенной точки назначения с соблюдением требований SLA.

NPCR выполняет функции сразу несколько устройств — диспетчер потока задач в среде NPC, маршрутизатор трафика и задач в среде NPC, VPN шлюз для вычислительных мощностей, находящихся за ним (на рис. 4 они обозначены как DC/Edge), CPE устройство для вычислительных мощностей, находящихся за ним, и предоставляет следующую функциональность:

1. Распределение сервисов приложения (AS) / виртуальных сетевых функций (VNF) между вычислительными узлами (BU) контура NPCRL;

2. Принятие решения: стоит выполнять определенный AS/VNF на BU, подсоединенном к этому NPCR или нет;

3. Перенаправление AS / VNF, которые не были приняты для выполнения на текущем BU, на другие NPCR, чьи вычислительные ресурсы будут предпочтительнее с точки зрения эффективности выполнения приложения как единого целого или сбалансированности загрузки ресурсов NPC среды;

4. Оптимальная маршрутизация трафика как между сервисами приложения, так и между VNF, используемых конкретным приложением;

5. Обеспечение требуемого SLA для транспортного соединения.

Некоторые из NPCR являются точками доступа к ресурсам среды NPC для внешних источ-

ников данных и приложений. Далее мы рассмотрим алгоритмы функционирования NPCR, обеспечивающие эффективное распределение потоков данных между доступными каналами и передачи данных в соответствии с требованиями AOS спецификации.

### 3. УПРАВЛЕНИЕ СЕТЕВЫМ ТРАФИКОМ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

Последние статьи [19, 20, 21] по методам балансировки нагрузки показали, что основное внимание сейчас уделяется методам машинного обучения, особенно многоагентному обучению с подкреплением (MARL). Как уже было отмечено, масштабы и скорость передачи данных в современных сети не позволяют получить оптимальное по скорости и точности балансировки трафика решение классическими математическими методами. Вот почему исследования продолжают фокусироваться на методах машинного обучения. Существует три подхода к мультиагентной оптимизации: централизованный, децентрализованный с взаимодействием между агентами и полностью децентрализованный. Во всех этих подходах предполагается, что агенты формируют свое локальное состояние на основе наблюдений за окружающей средой. Однако поведение агентов в этих подходах различно:

- централизованный подход предполагает наличие в среде одного объекта (центр управления), который координирует работу каждого агента. Этот центр управления собирает данные о локальных состояниях от всех агентов и определяет действия для каждого из них на основе решения задачи оптимизации;

- децентрализованный подход с взаимодействием между агентами (или просто децентрализованный подход) предполагает, что каждый агент обменивается с другими агентами своим локальным состоянием. На основе собранной информации агент выбирает оптимальное действие;

- полностью децентрализованный подход не предполагает какого-либо общения между агентами. Каждый агент принимает решение только на основе анализа истории своего поведения.

Авторы настоящей статьи в работе [22] предложили новый метод Multi-Agent Routing using Hashing (MAROH). Метод MAROH основан на объединении идей децентрализованного мультиагентного обучения с подкреплением и

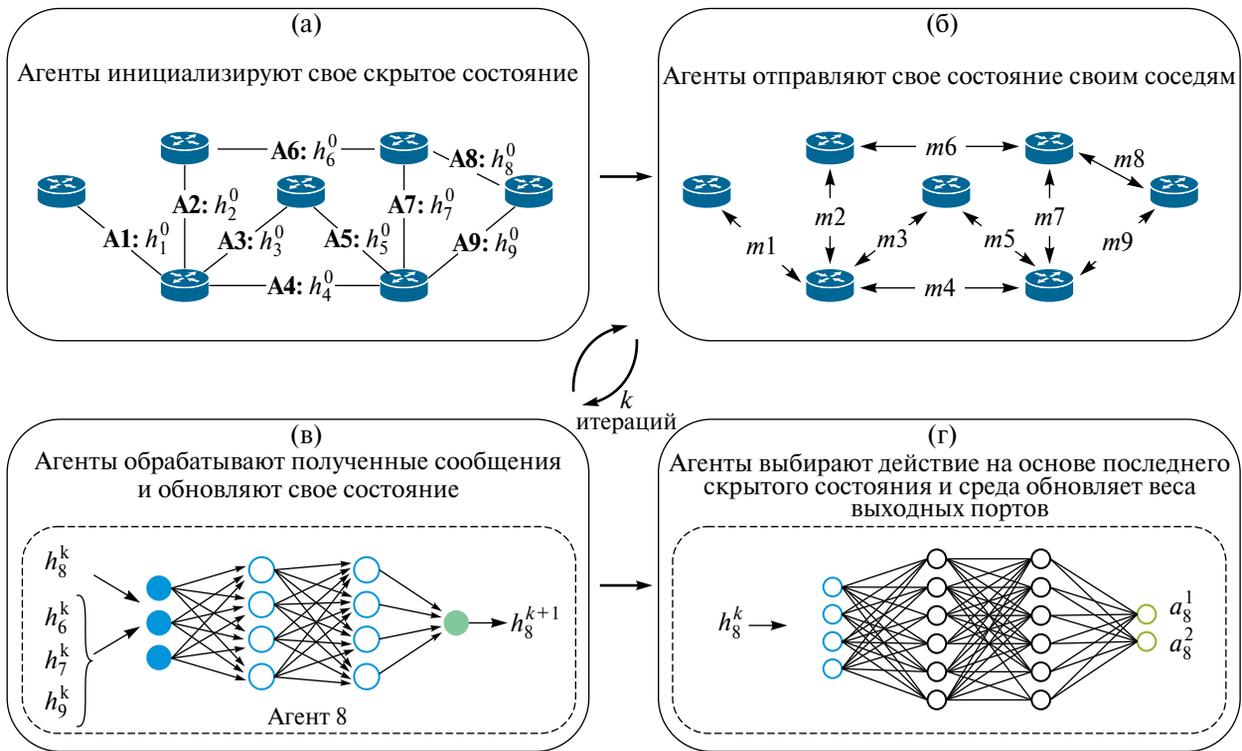


Рис. 2. Схема работы MARON.

алгоритмов консистентного хеширования. Эта комбинация позволила обеспечить справедливое распределение трафика между сетевыми ресурсами и эффективное их использование. Предложенный метод в каждый момент времени каждому выходному порту NPCR присваивает определенный вес, который потом используется консистентной хэш-функцией для распределения потоков данных между наложенными каналами. Таким образом, ключевыми проблемами являются то, как присвоить веса выходным портам NPCR и как построить надлежащую хэш-функцию.

Чтобы избежать появления циклов на маршрутах, для выбора порта до надлежащего места назначения в методе MARON был разработан специальный алгоритм построения маршрутов, называемый выбором следующего перехода (NHS) [22]. Согласно этому алгоритму, строится два ациклических направленных остовных подграфа топологии NPC и лишь один раз можно перейти между этими подграфами при построении маршрута, что гарантирует отсутствие циклов.

Метод MARON состоит из трех частей:

1. Вычисление набора выходных портов алгоритмом NHS.
2. Расчет весов для вычисленных портов алгоритмом MARL.

3. Распределение потоков данных между каналами, инцидентными вычисленным портам в соответствии с рассчитанными весами.

Напомним, что MARON – это алгоритм управления трафиком в NPC агентах, расположенными по одному на каждом NPCR.

Общая схема работы агента в предложенном методе представлена на рис. 4. В MARON используется метод, называемый нейронной сетью передачи сообщений (Message Passing Neural Network – MPNN). MPNN предназначен для построения оптимальной передачи сообщений между агентами в сети, представленной неориентированным графом. Для TCP/IP сети эти сообщения будут являться сообщениями протокола внутридомашней маршрутизации IGP (например, OSPF) с обновлениями состояний сети, а для MARON агента – сообщения о состоянии агента. Заметим, что для контура NPCRL могут быть адаптированы существующие протоколы IGP.

Метод MPNN основан на итеративном алгоритме передачи сообщений между выбранными элементами графа – вершинами, где располагаются агенты. Передаваемые сообщения обеспечивают обновление состояний агентов, которое в методе MPNN называется скрытым состоянием (hidden state). В нашем случае скрытое состо-

яние представлено тройкой – занятой полосой пропускания канала  $b_{i,j}$ , пропускной способностью канала  $c_{i,j}$  и текущими весами  $r_{i,j}$ . Скрытое состояние может быть инициализировано случайно выбранными значениями либо рассчитанными заранее на основе уже собранной статистики (рис. 4а). Затем агенты отправляют свое скрытое состояние всем своим соседям в графе наложенной сети (рис. 4б). На основе полученных сообщений от соседей и своего собственного скрытого состояния каждый NPCR обновляет свое скрытое состояние при помощи нейронной сети (рис. 4в). Процесс отправки сообщений соседям и обновления скрытого состояния повторяется заранее заданное количество раз. Это обеспечивает распространение состояния агента в заранее определённой его окрестности. Размер этой окрестности определяет количество итераций отправки сообщений соседям и обновления скрытого состояния. Экспериментальное исследование показало, что количество обменов не должно превышать диаметр графа, иначе скрытые состояния у всех агентов становятся почти неразличимыми между собой и агенты будут применять произвольные действия вместо тех, которые подходят текущему состоянию сети. После завершения процесса обновления состояния специальная нейронная сеть на агенте NPCR рассчитывает оценку ценности для каждого возможного действия агента (рис. 4г). Под действиями агента будем понимать операции по изменению веса канала: сложение с константой, умножение на константу или отсутствие изменения веса. Агент NPCR выбирает действие согласно выданной оценке. В результате изменяется вес наложенного канала, а после работы хеш-функции и распределение потоков данных в сети.

Под оптимальным распределением трафика в сети будем понимать равномерную загрузку всех наложенных каналов. Для достижения этой цели будем минимизировать функцию 
$$\Phi = \frac{1}{|E|} \sum_{(u,v) \in E} \left( \frac{b_{u,v}}{c_{u,v}} - \mu' \right)^2,$$
 где  $|E|$  – число наложенных каналов, а  $\mu'$  – средняя загрузка каналов, равная  $\frac{1}{|E|} \sum_{(u,v) \in E} \frac{b_{u,v}}{c_{u,v}}$ . В терминах задачи оптимизации MARL  $\Phi$  является целевой функцией.

Был проведен экспериментально сравнительный анализ эффективности метода MARON с

другими распространенными методами балансировки – ECMP [23] и UCMP [24]. Методика проведения сравнительного анализа основывается на моделировании многоагентного управления потоками данных в NPC методом Монте-Карло. Для моделирования ECMP и UCMP использовался тот же подход с расчетом весов наложенного канала, как и в MARON, только для ECMP использовались наложенные каналы равной протяженности и вес у всех каналов брался равным 1, а для UCMP вес наложенного канала принимался равным текущей загрузке канала. Здесь стоит подчеркнуть важное отличие MARON от методов ECMP и UCMP – MARON принимает решение на основе общения между агентами, в то время как ECMP и UCMP только на основе локальной информации. После каждого обновления весов в сеть пускалось 40 потоков с новыми идентификаторами, распределение которых меняло загрузку наложенных каналов. Так как в настоящий момент отсутствуют статистические данные по потокам в сетевой вычислительной инфраструктуре, каждый поток имел случайно выбранный узел источник и узел назначения. Запускалось 100 итераций обновлений весов для каждого из методов MARON, ECMP, UCMP с одинаковыми входными данными (множество потоков на каждой итерации) на топологии с множеством вариантов альтернативных маршрутов, изображенной на рис. 4. В качестве критерия сравнения использовалась целевая функция  $\Phi$ , отражающая равномерность загрузки наложенных каналов.

Также было проведено сравнение с полностью централизованным подходом по управлению агентами NPCR, в котором может достигаться оптимальное распределение трафика, так как присутствует информация о состоянии всей сети. Использовался генетический алгоритм для расчета весов наложенных каналов на каждой итерации. Результаты сравнительного анализа значения целевой функции  $\Phi$  приведены на рис. 4 в виде коробчатой диаграммой для каждого метода. MARON обозначен как Multi-agent Traffic Engineering (MA-TE). На рис. 4 хорошо видно, что MARON показывает значительно лучшие результаты по сравнению с ECMP и UCMP и похожие результаты по сравнению с централизованным подходом.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рост вычислительной и сетевой производительности, а также кардинальные изменения организации современных приложений требуют

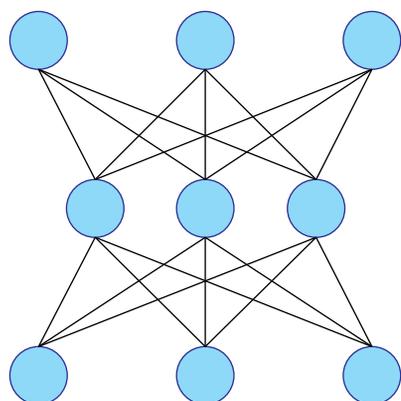


Рис. 3. Топология сети агентов NPCR в сравнительном анализе.

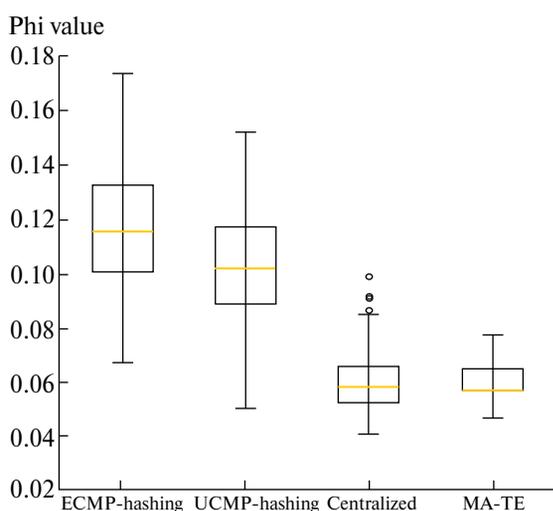


Рис. 4. Сравнение эффективности работы MARON с ECMP, UCMP и централизованным подходом.

создания новой вычислительной инфраструктуры. В статье представлены архитектура новой Сетевой Вычислительной инфраструктуры и основные принципы ее организации. Режим работы реального времени для современных приложений, скорость передачи данных и обработки данных в современных сетях, размер масштабирования сервисов как сетевых, так и приложений на сегодня таков, что применение классических методов оптимизации управления ресурсами и потоками задач и данных невозможен из-за их вычислительной сложности. Использование методов машинного обучения позволяют эффективно решить разнообразные задачи от прогнозирования состояния вычислительной инфраструктуры до планирования потоков данных внутри наложенной сети. В статье представлен сравнительный анализ метода машинного обучения для управления трафиком в вычислитель-

ной среде нового поколения MARON с широко распространенными методами ECMP и UCMP. Основное достоинство MARON – распределенное принятие решений, когда каждый NPCR маршрутизатор выполняет балансировку проходящих через него потоков данных на основе своего локального состояния и данных о состоянии его соседей. Экспериментально было показано, что предложенный метод превосходит по критерию равномерности загрузки каналов ECMP и UCMP. Сказанное позволяет утверждать, что методы машинного обучения позволят сделать сетевую вычислительную инфраструктуру предсказуемой, безопасной, надежной, эффективной и масштабируемой.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить академика РАН Е.Е. Тыртышникову и доцента С.А. Матвеева за консультации по последним достижениям в области математических методов факторизации и представления матриц, и профессора А.И. Гасникова, доцента А.Н. Безносикова за консультации по вопросу последних достижений в области математических методов распределенной оптимизации.

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ, проект № 23-Ш03-03.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smeliansky R.* Hierarchical edge computing // Int. Conf. Modern Network Tech., MoNeTec-2018. Moscow, 2018. P. 97–105.
2. *Smeliansky R. et al.* On hpc & cloud environments integration. Chapter 1 // Performance evaluation models for distributed service networks. Springer: Springer Nature Switzerland AG Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland, 2020.
3. *Smeliansky R.* Network Powered by Computing: Next Generation of Computational Infrastructure // Edge Computing Technology, Management and Integration. IntechOpen, 2023. ISBN 978-1-83768-862-3. P. 47–70.
4. Topology and Orchestration Specification for Cloud Applications. <http://docs.oasis-open.org/tosca/TOSCA/v1.0/os/TOSCA-v1.0-os.html> [Accessed: 2024-19-03]
5. <https://www.itprotoday.com/serverless-computing/what-serverless-computing> (accessed: March 19, 2024).
6. *Foster I., Kesselman C.* The Grid 2: Blueprint for a new computing infrastructure. Elsevier, 2003.

7. Foster I., Kesselman. C. The history of the grid // arXiv:2204.04312, 2022.
8. <https://www.cpubenchmark.net/year-on-year.html> (accessed: March 19, 2024).
9. <https://www.visualcapitalist.com/cp/charted-history-exponential-growth-in-ai-computation/> (accessed: March 19, 2024).
10. <https://habr.com/ru/companies/yota/articles/283220/> (accessed: March 19, 2024).
11. Мусеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 352 с.
12. Karimireddy S.P. et al. Scaffold: Stochastic controlled averaging for federated learning. International conference on machine learning. PMLR, 2020.
13. Vogels T., Karimireddy SP., Jaggi M. PowerSGD: Practical low-rank gradient compression for distributed optimization // Advances in Neural Information Processing Systems. 2019.
14. Oseledets I., Tyrtshnikov E. TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra and its Applications. 2010. T. 432. № 1. P. 70–88.
15. Gusak J. et al. Automated multi-stage compression of neural networks // Proceedings of the IEEE/CVF Int. Conf. on Computer Vision Workshops, 2019.
16. Novikov A. et al. Tensorizing neural networks // Advances in neural information processing systems. 2015. N 28.
17. Gong Y. et al. ETTE: Efficient tensor-train-based computing engine for deep neural networks // Proceedings of the 50th Ann. Int. Symp. on Computer Architecture. 2023. P. 1–13.
18. Смелянский Р.Л., Антоненко В.А. Концепции программного управления и виртуализации сетевых сервисов в современных сетях передачи данных. М.: Курс, 2019. 160 с.
19. Bernardes G. et al. Is machine learning ready for traffic engineering optimization? // 2021 IEEE29th International Conference on Network Protocols (ICNP). IEEE, 2021.
20. You Xinyu et al. Toward packet routing with fully distributed multiagent deep reinforcement learning. // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems 52.2 (2020): 855–868.
21. Mai Xuan, Quanzhi Fu and Yi Chen. Packet routing with graph attention multi-agent reinforcement learning // 2021 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM). IEEE, 2021.
22. Stepanov E. et al. On Fair Traffic allocation and Efficient Utilization of Network Resources based on MARL // Preliminary on ResearchGate. Available from: [https://www.researchgate.net/publication/371166584\\_On\\_Fair\\_Traffic\\_allocation\\_and\\_Efficient\\_Utilization\\_of\\_Network\\_Resources\\_based\\_on\\_MARL](https://www.researchgate.net/publication/371166584_On_Fair_Traffic_allocation_and_Efficient_Utilization_of_Network_Resources_based_on_MARL) (accessed: November 14, 2023).
23. ECMP Load Balancing. Available from: [https://www.cisco.com/c/en/us/td/docs/ios-xml/ios/mp\\_13\\_vpns/configuration/xs-3s/asr903/mp-13-vpns-xe-3s-asr903-book/mp-13-vpns-xe-3s-asr903-book\\_chapter\\_0100.pdf](https://www.cisco.com/c/en/us/td/docs/ios-xml/ios/mp_13_vpns/configuration/xs-3s/asr903/mp-13-vpns-xe-3s-asr903-book/mp-13-vpns-xe-3s-asr903-book_chapter_0100.pdf) (accessed: November 14, 2023).
24. UCMP Load Balancing. Available from: [https://www.cisco.com/c/en/us/td/docs/ios-xml/ios/mp\\_13\\_vpns/configuration/xs-3s/asr903/17-1-1/b-mpls-13-vpns-xe-17-1-asr900/m-ucmp.pdf](https://www.cisco.com/c/en/us/td/docs/ios-xml/ios/mp_13_vpns/configuration/xs-3s/asr903/17-1-1/b-mpls-13-vpns-xe-17-1-asr900/m-ucmp.pdf) (accessed: November 14, 2023).

## ON ML METHODS FOR NETWORK POWERED BY COMPUTING INFRASTRUCTURE

Corresponding Member of the RAS R. L. Smeliansky<sup>a, \*</sup>, E. P. Stepanov<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Faculty of computational mathematics and cybernetics,  
Department of computing systems and automation, Moscow, Russia*

The paper considers the application of machine learning methods for optimal resource management for Network Powered by Computing (NPC) – a new generation computing infrastructure. The relation between the proposed computing infrastructure and the GRID concept is considered. It is shown how machine learning methods applied to computing infrastructure management make it possible to solve the problems of computing infrastructure management that did not allow the GRID concept to be fully implemented. As an example, the application of multi-agent optimization methods with reinforcement learning for network resources management is considered. It is shown that the application of multi-agent machine learning methods makes it possible to increase the speed of distribution of transport flows and ensure optimal NPC network channel load according to the criterion of uniform load distribution, and that such management of network resources is more effective than a centralized approach.

*Keywords:* reinforcement learning, multi-agent methods, network powered by computing